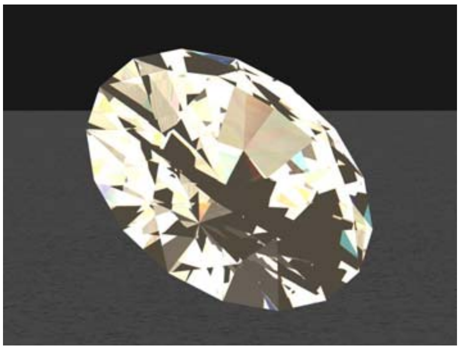
B11 Die Polyederformel

Eine einfache Fragestellung: Geschlossene, ebene Figuren mit geradlinigen Begrenzungen nennt man Vielecke oder Polygone: Dreiecke und Vierecke sind spezielle Polygone. Bezeichnet man die Anzahl der Ecken eines Polygons mit e und jene der Kanten mit k, so gilt der einfache Zusammenhang

$$e = k\,.$$

Körper, deren Oberfläche aus Polygonen besteht, nennt man Polyeder: Quader und Pyramiden sind besondere Polyeder.



Wertvolles Polyeder
Foto: ENS Lyon

Wenn man die Flächenzahl mit f bezeichnet, so ist es naheliegend, nach einer Beziehung zwischen den Grössen e, f und k zu suchen. Im Jahre 1758 fand Euler den Zusammenhang

$$e + f - k = 2\,,$$

der heute als Eulerscher Polyedersatz bekannt ist.

Der Satz gilt nur für konvexe Polyeder, das heisst, der Körper darf keine Einbuchtungen aufweisen. Ob Euler die obige Formel tatsächlich als Erster kannte, ist unklar. Bereits R. Descartes (1596 - 1650) hatte sich mit der Fragestellung beschäftigt und ein Resultat gefunden, das grosse Ähnlichkeit mit demjenigen von Euler hat.

Anwendung auf Spezialfälle: Euler hat einen Beweis für die Richtigkeit seiner Formel geliefert. Wir begnügen uns mit der Überprüfung an einigen ausgewählten Körpern.

Körper	Eckenzahl e	Flächenzahl f	Kantenzahl k	$e+f-k$
Tetraeder	4	4	6	2
Würfel	8	6	12	2
Oktaeder	6	8	12	2
Dodekaeder	20	12	30	2
Ikosaeder	12	20	30	2
Brillant	48	58	104	2