Die Eulersche Zahl e

Prominenz: Unter den Menschen ist Prominenz relativ und vergänglich. Ganz anders im Zahlenreich, hier ist Prominenz eine stabile Währung: Nur fünf Zahlen zählen dazu. Wir stellen vor: am Anfang die oft vernachlässigte, jedoch bedeutende Null, dann die göttliche Eins, die transzendente Kreiszahl π, die zauberhafte imaginäre Einheit i und zu guter Letzt die populäre Eulersche Zahl e. Im Reich der Zahlen ist Prominenz allein durch Relevanz zu erreichen, Nacktheit oder schlechte Manieren sind hier nicht förderlich.

Mona Lisa
Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

Die Relevanz von e: Jakob Bernoulli (1654 - 1705) formulierte 1689 das Problem der stetigen Verzinsung.

> *Eine Summe Geldes sei auf Zinsen angelegt, dass in den einzelnen Augenblicken ein proportionaler Teil der Jahreszinsen zum Kapital geschlagen wird.*

Bei einer einmaligen Verzinsung und einem - zugegeben unrealistischen - Zinssatz von 100% würde ein Franken in einem Jahr auf zwei Franken anwachsen.

Würden halbjährlich je 50% Zins gutgeschrieben, besässe man Ende Jahr bereits Fr. 2.25; bei drei Verzinsungen wären es gar Fr. 2.37. Es stellt sich nun die Frage, wie stark das Kapital anwüchse, wenn immer mehr Verzinsungen erfolgten und letzlich die Zinsgutschrift in jedem Augenblick vorgenommen würde.

Verzinsungen	Zinseszinsformel	Endkapital
1	$K_1 = (1+1)$	Fr. 2.000
2	$K_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	Fr. 2.250
10	$K_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$	Fr. 2.594

Der Ausdruck $K_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wächst zwar mit zunehmendem n, aber nicht über alle Grenzen und strebt letztlich gegen eine Zahl. Leonhard Euler bezeichnete diese angestrebte Zahl mit e und leitete die nachfolgende Reihendarstellung her.

$$\begin{aligned} \mathrm{e} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots \\ &= 2.7182818284.... \end{aligned}$$