B23 Mit Euler hinauf zum Licht

Schritt um Schritt nach oben: mit bereits bekannten Werten ermöglicht und fand die nachstehende Rekursionsformel:

$$\Pi(n) = (n-1)\left[\Pi(n-1) + \Pi(n-2)\right], \quad n > 2\,.$$

Ausgehend von $\Pi(1) = 0$ und $\Pi(2) = 1$ können wir uns Schritt für Schritt nach oben arbeiten.

$$\begin{array}{lclclcl}
\Pi(3) & = & (3-1)\left[\Pi(2)+\Pi(1)\right] & = & 2\left[1+0\right] & = & 2 \\
\Pi(4) & = & (4-1)\left[\Pi(3)+\Pi(2)\right] & = & 3\left[2+1\right] & = & 9 \\
\Pi(5) & = & (5-1)\left[\Pi(4)+\Pi(3)\right] & = & 4\left[9+2\right] & = & 44 \\
\Pi(6) & = & (6-1)\left[\Pi(5)+\Pi(4)\right] & = & 5\left[44+9\right] & = & 265
\end{array}$$

Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten erhält man $w_4 = \frac{3}{8} = 0.375$, $w_5 = \frac{44}{120} \approx 0.3667$, $w_6 = \frac{53}{144} \approx 0.3681$.

Wanderer über dem Nebel
Caspar David Friedrich (1774 - 1840)

Die Weihnachtsbescherung: Betrachtet man die wenigen berechneten Werte w_n, ahnt man, dass diese einem festen Wert zustreben. Und sofort stellt sich die Frage nach ihrem Ziel. Bereits Rémond de Montmort (1678 - 1719) kannte eine explizite Berechnungsart für Π:

$$\Pi(n) = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Damit lässt sich der Grenzwert der Folge w_n bestimmen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} w_n &= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{e} \\
&\approx 0.3679\,.
\end{aligned}$$

Einmal mehr treffen wir überrascht auf die Eulersche Zahl e.