

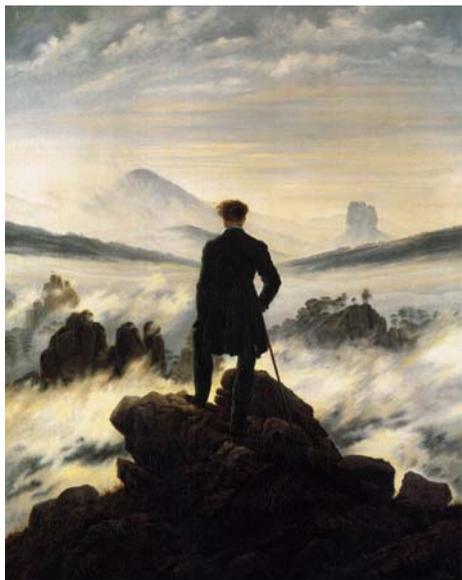
Schritt um Schritt nach oben: mit bereits bekannten Werten ermöglicht und fand die nachstehende Rekursionsformel:

$$\Pi(n) = (n - 1) [\Pi(n - 1) + \Pi(n - 2)] , \quad n > 2 .$$

Ausgehend von $\Pi(1) = 0$ und $\Pi(2) = 1$ können wir uns Schritt für Schritt nach oben arbeiten.

$$\begin{aligned} \Pi(3) &= (3 - 1) [\Pi(2) + \Pi(1)] = 2 [1 + 0] = 2 \\ \Pi(4) &= (4 - 1) [\Pi(3) + \Pi(2)] = 3 [2 + 1] = 9 \\ \Pi(5) &= (5 - 1) [\Pi(4) + \Pi(3)] = 4 [9 + 2] = 44 \\ \Pi(6) &= (6 - 1) [\Pi(5) + \Pi(4)] = 5 [44 + 9] = 265 \end{aligned}$$

Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten erhält man $w_4 = \frac{3}{8} = 0.375$, $w_5 = \frac{44}{120} \approx 0.3667$, $w_6 = \frac{53}{144} \approx 0.3681$.



Wanderer über dem Nebel
Caspar David Friedrich (1774 - 1840)

Die Weihnachtsbescherung: Betrachtet man die wenigen berechneten Werte w_n , ahnt man, dass diese einem festen Wert zustreben. Und sofort stellt sich die Frage nach ihrem Ziel. Bereits Rémond de Montmort (1678 - 1719) kannte eine explizite Berechnungsart für Π :

$$\Pi(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right] .$$

Damit lässt sich der Grenzwert der Folge w_n bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} w_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \\ &\approx 0.3679 . \end{aligned}$$

Einmal mehr treffen wir überrascht auf die Eulersche Zahl e .