C12 Das Catalan-Problem

Eine nachbarschaftliche Frage: Levi ben Gerson (1288 - 1344) markierte in der Folge der natürlichen Zahlen diejenigen, die höhere Potenzen von 2 oder 3 sind: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 2^4$ usw. Die markierten Felder 8 und 9 liegen unmittelbar nebeneinander. Levi ben Gerson fragte sich, ob es weitere Paare von solchen Feldern gibt und bewies, dass dies nicht zutrifft.

Im Jahre 1738 zeigte Leonhard Euler, dass die Gleichung $x^2 - y^3 = 1$ nur die Lösung $x = 3$, $y = 2$ hat. Markiert man jene natürlichen Zahlen, die zweite oder dritte Potenzen sind, so grenzen wiederum nur die Felder 8 und 9 aneinander. Eulers verzwickter Beweis war ein erster erfolgreicher Schritt in Richtung Klärung einer allgemeineren Fragestellung.

Potenzen kommen sich selten nahe: Im *Crelle Journal* für reine und angewandte Mathematik erschien im Jahr 1844 ein Leserbrief des belgischen Mathematikers Eugène Charles Catalan (1814 - 1894).

> *Ich bitte Sie, Monsieur, in Ihrer Sammlung das folgende Theorem zu veröffentlichen, das ich für wahr halte, wenngleich es mir noch nicht gelungen ist, es vollständig zu beweisen; andere mögen mehr Glück haben:*
>
> *Zwei aufeinander folgende ganze Zahlen können, mit der Ausnahme von 8 und 9, keine exakten Potenzen sein; anders gesagt: Die Gleichung $x^m - y^n = 1$, in der die Unbekannten positive ganze Zahlen sind, hat nur eine einzige Lösung.*

Hauptgebäude ETH Zürich

Dutzende von Mathematikern suchten über 150 Jahre lang intensiv nach einem Beweis für die Catalan-Vermutung. Im Jahre 2002 gelang dem rumänischen Mathematiker Preda Mihăilescu, Absolvent der ETH Zürich, der grosse Durchbruch. Er löste damit eines jener ganz grossen Probleme der Zahlentheorie, an denen bereits Euler gearbeitet hatte.