C13

Das Basler-Problem

Spielzeugauto
Foto: H. Hunziker

Das Ganze und die Teile: Zerlegt man ein Ganzes in seine Teile und setzt diese zusammen, so erhält man wieder das Ganze. Wer hat diese Erfahrung nicht bereits als Kind gemacht? Schnell war das neue Spielzeugauto in seine Teile zerlegt und kein Zweifel, richtig zusammengesetzt, ergäbe sich, zumindest im Prinzip, wieder das Auto. Zugegeben, es blieb meist beim Prinzip.

Zerlegt man die Eins in zwei gleich grosse Zahlen, so erhält man $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, zusammengesetzt erhält man die Eins zurück

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,.$$

Zerlegt man den zweiten Summanden wieder in zwei gleich grosse Teile, so erhalten wir

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man eine Darstellung der Eins als Summe von unendlich vielen Summanden

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots\,.$$

Die unendlichen Reihen waren Jakob Bernoullis (1654 - 1705) Leidenschaft, er war ganz vernarrt in deren Geheimnisse und wollte gar göttliches Wirken in ihnen erkennen. In seinem Werk über unendliche Reihen schrieb er:

> *Wie die unendliche Reihe sich fügt zur endlichen Summe und der Grenze sich beugt, was dir grenzenlos scheint, so im bescheidenen Körper verbirgt der unendlichen Gottheit Spur sich, und grenzenlos wird, was doch so eng ist begrenzt.*

Die Teile und das Ganze: Ein Puzzle mit 1000 Teilen zusammenzusetzen, kann anspruchsvoll sein, insbesondere dann, wenn das fertige Bild unbekannt ist. Bei unendlichen Reihen liegt in der Regel diese Situation vor. Gegeben sind die unendlich vielen Summanden und gesucht ist deren Summe. Der Italiener Pietro Mengoli (1625 - 1686) versuchte als Erster, allerdings erfolglos, die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

zu bestimmen. Obwohl Jakob Bernoulli zu den führenden Mathematikern seiner Zeit gehörte, konnte auch er das Problem, heute Basler-Problem genannt, nicht bewältigen. Sein Suchen war jedoch nicht vergebens, er konnte nachweisen, dass die gesuchte unendliche Summe kleiner als 2 sein muss.