C23 Euler positioniert sich unter den Besten

Schneller zum Ziel: Jakob Bernoulli wurde im August 1705 zu Grabe getragen und der Wert der Basler-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ war noch immer unbekannt. Mit Geduld konnte man zwar Näherungswerte

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{10^2} \quad = \quad 1.549'767'731'...$$

berechnen, dem gesuchten Grenzwert kommt man aber nur langsam näher. Werden beispielsweise die ersten 1000 Glieder addiert, so stimmt das Resultat lediglich in den ersten zwei Nachkommastellen mit dem Grenzwert überein.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} \quad = \quad 1.643'934'566'...$$

Um 1731 fand Euler einen Weg, die Summe der Basler-Reihe durch eine Reihe mit wesentlich besserem Konvergenzverhalten auszudrücken. Unter virtuoser Anwendung der Integralrechnung zeigte er:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (\ln(2))^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5^{n-1}}{n^2}\,.$$

Summiert man 10 Summanden der rechten Reihe, stimmt die Näherung bereits in 4 Nachkommastellen mit dem Grenzwert überein, bei 14 Summanden sind es bereits 6. Ein dramatischer Fortschritt! Euler war aber noch nicht zufrieden.

Jakob Bernoulli
Foto: M. Suter

Wenn doch mein Bruder noch lebte: Im Jahre 1735 verkündete Euler

> *Gegen alle Erwartung habe ich nun einen eleganten Ausdruck für die Summe der Reihe* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots$ *gefunden.*

Mit traumwandlerischer Sicherheit hatte Euler Summationen, Grenzwertbildungen und Integrationen vertauscht, hatte Sätze, die für den endlichen Fall konzipiert waren, im unendlichen Fall angewendet und damit das Basler-Problem gelöst.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.644'934'066'...$$

Mit dieser Glanzleistung verschaffte sich der junge Euler einen ersten Platz in der mathematischen Gemeinschaft des 18. Jahrhunderts. Nachdem sein ehemaliger Lehrer Johann Bernoulli von der Lösung erfahren hatte, schrieb er in einem Brief

> *Wenn nur mein Bruder noch lebte!*

und vermutlich wurde ihm zum ersten Mal bewusst, dass hier einer war, der selbst ihn überragte.