EULERSCHE ZAHL Vor dreihundert Jahren wurde einer der grössten Wissenschaftler der Schweiz geboren: der Mathematiker Leonhard Euler. Nach ihm benannt ist eine spezielle Zahl: e oder 2,718 281 828 450 945 235 360 287 471 352 662 497 757 247 093 699 959 574 966 967 627 724 076 630 353 547 594 571…

Das Wunderkind der Zahlenwelt

Von Roland Fischer

Kann man die Geschichte einer Zahl erzählen? Die Geschichte eines Mathematikers, die Geschichte eines Satzes und des Ringens um seinen Beweis: da wäre nichts dabei. Auch die Geschichte der Zahlen lässt sich erzählen. Doch die Geschichte *einer* Zahl? War sie nicht schon da, sobald der Zahlenstrahl aufgespannt war, der rundweg alles abdeckt, was sich so tummelt zwischen minus und plus unendlich?

Es gibt allerdings Zahlen, die plötzlich auf den Landkarten auftauchen wie ein neuer Kontinent und die die Geografie im Reich der Zahlen auf dramatische Weise verändern. Die Null gehört dazu und die Zahl π. Bis zu ihrer Entdeckung sind sie verborgen wie eine nicht verzeichnete Insel, nicht etwa weisse Flecken, die auf ihre Erkundung warten, sondern einsame Erhebungen in der Zahlenflut, von deren Existenz niemand etwas ahnt. Manchmal stösst der Mathematiker bei seinen gedanklichen Expeditionen auf ein Stückchen solchen Festlands, und manchmal entpuppen sich die Küstenstriche vermeintlich kleiner Inseln als Teile eines grossen Kontinents.

Man könnte, um bei der Analogie zu bleiben, π als die Alte Welt bezeichnen und *e* als die Neue (allerdings liegt nicht ein ganzer Atlantik zwischen den beiden, sie sind vielmehr eng benachbart: π ist etwas grösser als 3, *e* ein wenig kleiner). *e* ist das Amerika der Mathematik, und der Basler Leonhard Euler war dafür besorgt, dass seine Entdeckung eine Zeitenwende markierte: Er half den neuen Kontinent zu vermessen.

Um die Entdeckung von Zahlen solchen Formats recht zu würdigen, braucht es etwas Zahlentheorie. Der Zahlenstrahl wird von den ganzen Zahlen grob abgesteckt. Zwischen diesen Pflöcken finden sich zudem alle Brüche, die rationalen Zahlen (nach lateinisch ratio: Verhältnis). Es gibt, da es unendlich viele ganze Zahlen gibt, natürlich auch unendlich viele rationale Zahlen, doch es sind ihrer unendlich viele mehr. Tatsächlich hat es zwischen zwei beliebig nahe beieinander liegenden rationalen Zahlen (wie zum Beispiel einem Neunundneunzigstel und einem Hundertstel) Platz für unendlich viele weitere davon. Die rationalen Zahlen liegen also «dicht» auf der Zahlengeraden, wie der Mathematiker sagt, und das wussten schon die Griechen. Deshalb glaubten sie auch, dass sonst nichts mehr Platz findet auf dieser Geraden, dass also jede Zahl rational, durch einen Bruch darstellbar sein müsse. Es gab zwar auch schon einige unter ihnen, die behaupteten, irrationale Zahlen gefunden zu haben, doch mochten die Griechen nie recht akzeptieren, dass sich in einem Grundpfeiler ihrer von Harmonien durchzogenen Welt Risse abzuzeichnen begannen. So halfen sie sich denn einfach damit, dass sie beispielsweise die Wurzel aus 2 zwar als geometrische Tatsache, die konstruktiv erschlossen werden konnte, aber nicht als Zahl ansahen.

Heute weiss man, dass es mehr irrationale als rationale Zahlen gibt. Dass also, wenn man alle rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden verteilt, zwischen den schon besetzten Bereichen noch immer beliebig viele Löcher verbleiben. In einem ebensolchen Loch hielt sich auch *e* verborgen, bis die Zahl im siebzehnten Jahrhundert plötzlich auf den Schreibtisch eines Bankangestellten in vielleicht Venedig kullerte, so genau lässt sich das nicht mehr nachvollziehen. Den ersten Auftritt hatte *e* auf einem durchaus prosaischen Feld, nämlich demjenigen der Zinseszinskalkulation. Es gibt da die Frage, ob es dem oder der AnlegerIn gegenüber fair ist, dass man den zu verzinsenden Zins das ganze Jahr über unter Verschluss hält und ihn erst für die nächste Runde rausrückt. Man könnte ihn ja auch monatlich aufs Konto schlagen (dann würde er schon für den Rest des Jahres für einen arbeiten) oder täglich, oder sogar jede Sekunde, oder, im mathematischen Grenzfall, kontinuierlich. Als der theoretisch versierte Banker diesen Grenzfall mathematisch ausdrückte, stiess er eben auf die berühmte Formel, die später als Definition für *e* dienen sollte. Und gleichzeitig liefert dieser Ursprung auch die wohl handlichste, wenn auch immer noch sperrige Veranschaulichung für die Eulersche Zahl: Wenn ein Kapital von einem Franken zu einem Zins von hundert Prozent angelegt und der Zins kontinuierlich verrechnet wird, dann erhält man am Ende eines Jahres ein Kapital von *e* Franken (statt zwei Franken wie bei einer jährlichen Verzinsung).

Solche Ausdrücke, die einem Grenzwert zustreben, sind oft für Überraschungen gut. *e* ist, mathematisch gesprochen, gleich dem Grenzwert von $(1+1/n)^n$, wenn n gegen unendlich geht. Man könnte versucht sein, für ein unendlich grosses n die Klammer gleich 1 zu setzen, weil der Grenzwert von $1/n$ in diesem Falle gegen 0 geht, sodass der ganze Ausdruck 1^n gleich 1 wäre. Man könnte aber genauso vermuten, dass in der Klammer stets ein Wert grösser als 1 steht und dass jede Zahl, die grösser als 1 ist, ins Unendliche wächst, wenn sie ewig weiterpotenziert wird. Man kann aber auch den Taschenrechner zur Hand nehmen und die Probe aufs Exempel machen, und man wird finden: Die Wahrheit liegt zwischen den Extremen; das Ergebnis strebt nämlich von 2 (für n=1) langsam, sehr langsam dem eher ungelenken Wert von 2,71828... zu.

Aber es waren nicht finanztechnische Gründe, die *e* zu ihrer aussergewöhnlichen Stellung in der Mathematik verhalfen. Das Zinseszinsproblem ist nicht viel mehr als eine historische Marginalie. Viel wichtiger wurde *e* in einem Feld, das seine Geburt im ausgehenden 17. Jahrhundert erlebte und die Mathematik revolutionieren sollte: der Differentialrechnung. Insbesondere die mathematische Formulierung der Physik wäre ohne Differentialkonzepte unmöglich. Das Beschreiben von Grössen ist in der Physik ebenso wichtig wie das der Veränderungen, denen diese Grössen unterliegen. Man will nicht nur wissen, wie weit es von Bern nach Zürich ist, sondern auch, wie rasch der Ortswechsel stattfindet, woraus sich die Geschwindigkeit ergibt. Und die Beschleunigung wiederum beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit.

Es gibt in der Physik allerlei Beispiele, wo eine Grösse und ihre Änderung direkt verknüpft sind. Bekannt sind der radioaktive Zerfall (je mehr strahlendes Material, desto mehr zerfällt auch, das heisst, desto rascher ändert sich die Menge) und die Bevölkerungsentwicklung (je mehr Menschen, desto schneller wächst ihre Anzahl, jedenfalls bei gleich bleibender Geburten- und Sterberate). Alle diese Phänomene, bei denen die Menge eng an ihre Veränderung geknüpft ist, werden durch Exponentialgleichungen beschrieben, und die Mutter aller Exponentialgleichungen ist die *e*-Funktion e^x. Mathematisch ausgedrückt: Die *e*-Funktion ist die einzige Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

Und das ist der Grund, weshalb einem das *e* bei fast jedem physikalischen Problem entgegenspringt: *e*-Funktionen bilden den Grundlösungen für die mathematische Beschreibung aller möglichen natürlichen Vorgänge. Alles, was irgendwie schwingt, sich aufschaukelt oder sonstwie auf sich selbst zurückwirkt, ist ein Fall für *e* hoch x.

e ist gewissermassen das Neutrum der Differentialwelt; eine ähnliche Rolle spielen die 0 für die Addition und die 1 für die Multiplikation. Aber offenbar steckt in *e* noch viel mehr als bloss die natürlichste, reine Basis einer Exponentialfunktion. Entsprechend hat auch π vielerlei andere Bedeutungen als allein die ursprünglich geometrische (nämlich das Verhältnis von Kreisumfang und Durchmesser). *e* tanzt auf allen möglichen Hochzeiten. Ein schönes Beispiel ist das Auftauchen von *e* in einem Ausdruck, der die sogenannte Primzahldichte beschreibt (die Anzahl Primzahlen in einem bestimmten Intervall). Je mehr Zahlen man betrachtet, desto seltener tauchen Primzahlen auf. Doch scheint ihre Dichte im Unendlichen auf einen strikten Grenzwert zuzustreben – das jedenfalls hat geduldiges Auszählen ergeben, exakt hergeleitet hat diesen Grenzwert bis jetzt noch niemand. Dass in diesem Wert auch die Zahl *e* steckt, erstaunt die Mathematiker, denn Primzahlen gehören ja eigentlich dem ganzzahligen Reich an, und *e* zählt zu den halbsten Zahlen, die es überhaupt gibt: Mathematiker nennen Zahlen dieser Gattung ihrer mit klassischen Mitteln schwer zu fassenden Eigenschaften wegen «transzendent».

Leonhard Euler war ein mathematischer Gigant, vielerorts gilt er als der grösste Mathematiker aller Zeiten – ein Autor nennt ihn den «Mozart der Mathematik». Insofern ist es durchaus nachvollziehbar, dass *e* gerade seinen Namen trägt. Wenn man in einer mathematischen Enzyklopädie allerdings unter dem Stichwort «Euler» nachschlägt, dann geht *e* selbst fast unter in einer Unzahl von Einträgen: da gibt es Eulersche Formeln, Eulersche Sätze, Eulersche Gleichungen, und auch Eulersche Zahlen gibt es (welche mit dem magistralen *e* gar nichts zu tun haben). Alle diese Beiträge gehen eindeutig auf Euler zurück und machen ihren Entdecker auf eine ähnliche Weise unsterblich wie den Insektenforscher, der im Namen einer neuen Spezies weiterlebt. Bei *e* allerdings ist die Sache komplizierter: Euler hat die Zahl keineswegs entdeckt, auch war er nicht der Einzige, der ihre Bedeutung erkannt hat. Unstreitig ist einzig, dass die Bezeichnung «*e*» auf Euler zurückgeht wie übrigens auch das «i» für die imaginäre Einheit oder das griechische «Σ» für die Bezeichnung einer Summe.

Und noch auf eine andere Art hat Euler *e* geadelt: Er hat mit der Zahl nämlich die wohl schönste mathematische Gleichung aufgestellt: $e^{i\pi}+1=0$. Man braucht gar nicht ausführlich auf die praktische Bedeutung der Gleichung einzugehen (die tatsächlich der Differentialrechnung den komplexen Raum und damit eine Unmenge neuer Anwendungen eröffnet hat), um eine Ahnung zu bekommen von der Begeisterung der MathematikerInnen für diese Formel. Sie verbindet auf einfachste Art die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik (die drei Einheiten 0, 1 und i [die Wurzel aus –1], dazu π und *e*), ebenso wie die drei wichtigsten mathematischen Operationen: die Addition, die Multiplikation und die Potenz. Und alles das fügt sie mit einem einfachen Gleichheitszeichen zusammen.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Es ist viel darüber geschrieben worden, weshalb Euler, nach dem *e* bis heute auch die Eulersche Zahl genannt wird, wohl ausgerechnet den Buchstaben *e* gewählt hat. Eitelkeit dürfte es kaum gewesen sein, viel wahrscheinlicher ist der Bezug auf die Exponentialfunktion. Wer Euler aber wann die Ehre erwiesen hat, ihm mit der Benennung von *e* ein mathematisches Denkmal zu errichten, das haben die MathematikhistorikerInnen bislang noch nicht geklärt. Dass die Person, wer auch immer es war, den Namen aber zu Recht gewählt hat, daran gibt es keinen Zweifel.

300 JAHRE EULER

Leonhard Euler gilt als einer der grössten Wissenschaftler, die die Schweiz hervorgebracht hat. Am 15. April jährt sich sein Geburtstag zum 300. Mal. Das Jubiläum wird in Basel, seinem Geburtsort, ausgiebig gefeiert (darüber hinaus finden auch Veranstaltungen in St. Petersburg und Berlin statt, wo Euler gewirkt hat). In der Universitätsbibliothek gibt es eine Ausstellung zu «Leonhard Euler und den Wonnen der Wissenschaft», dazu Veranstaltungen in der ganzen Stadt, vom hoch dotierten Symposium über Stadtrundgänge auf Eulers Spuren bis hin zur Filmreihe über Wissenschaft und Genialität.

www.euler-2007.ch