... und was sagt Euler dazu?

Eine kleine Sammlung von Zitaten,
zusammengestellt für die Sonderschau

"Mathematik erleben"

im Naturhistorischen Museum Basel
(Juni bis September 2007)

Auswahl und Übersetzungen:
Martin Mattmüller
Euler-Archiv Basel

Erkenntniswert der “höheren” Mathematik

Heutzutage bezweifelt fast niemand mehr den grossen Wert der Mathematik, weil die verschiedenen Fächer und Techniken, die für das tägliche Leben nötig sind, ohne ihre Kenntnis nicht behandelt werden können. Allerdings lassen die meisten dieses Lob nur für die unteren Stufen, die Anfangsgründe dieser Wissenschaft gelten, während man der “höheren” Mathematik jede Nützlichkeit abspricht. Sie sei ein Spinngewebe, denken viele, das seiner ausserordentlichen Zartheit wegen nicht von praktischem Nutzen sei. Indem nun aber die gesamte Mathematik in der Untersuchung unbekannter Grössen besteht, zeigt sie die Mittel und Wege, die zur Wahrheit führen, macht die verborgensten Wahrheiten ausfindig und holt sie ans Licht. So schärft sie unsere Denkkraft und bereichert unsere Kenntnisse; und beides ist doch gewiss der grössten Mühe wert. Die Wahrheit ist nicht bloss an sich eine gute Sache, sie wird wegen des tiefen Zusammenhangs, den alle Wahrheiten miteinander haben, auch immer von Nutzen sein, auch wenn ihr Gebrauch nicht auf den ersten Blick ersichtlich ist. Der Einwand, die höhere Mathematik versenke sich allzu tief in die Ergründung der Wahrheit, gereicht dieser Wissenschaft also eher zur Ehre als zum Tadel.

Quanquam nunc quidem summa matheseos utilitas a nemine in dubium vocari solet, propterea quod variae disciplinae et artes in vita communi necessariae sine eius cognitione tractari nequeunt, haec tamen laus a plerisque inferioribus tantum istius scientiae partibus et tanquam elementis ita propria esse putatur, ut eam partem, quae ob excellentiam sublimior vocari solet, omni usu atque utilitate carere arbitrentur. His scilicet, qui ita sentiunt, mathesis sublimior telae araneae similis videtur, quae ob nimiam subtilitatem omni utilitate destituatur. Cum autem universa mathesis in investigatione quantitatum incognitarum versetur atque in hunc finem vel methodos et quasi vias ad veritatem ducentes patefaciat, vel ipsas veritates maxime reconditas eruat atque in lucem protrahat, quorum altero vis ingenii acuitur, altero cognitio nostra amplificatur: in neutro certe nimium operae collocari potest. Cum enim veritas non solum ipsa per se sit laudabilis, sed etiam ob summum nexum, quo cunctae veritates inter se cohaerent, utilitate vacare nequeat, etiamsi non statim usus perspiciatur, obiectio illa, qua mathesis sublimior nimis profunde in investigatione veritatis penetrare arguitur, in laudationem potius quam vituperium scientiae vertitur.

E 790
Commentatio de Matheseos sublimioris utilitate
(verfasst ca.1741 für Friedrich II. von Preussen)
Journal für die reine und angewandte Mathematik 35 (1847)
Opera III 2, p.392

Ehrfurcht vor der Schöpfung

Jetzo bin ich in der Lage, Euer Hoheit zu erklären, auf was für eine Art das Sehen in den Augen der Menschen und der Thiere vorgehe, welches ohne Zweifel die wunderbarste Sache ist, zu deren Erkenntniss der menschliche Verstand nur hat kommen können. Ob wir gleich bey weitem es nicht vollkommen kennen, so ist doch das wenige, was wir wissen, hinlänglich, uns von der Allmacht und der unendlichen Weisheit des Schöpfers zu überzeugen ... Wie sollten doch die starken Geister, die alles verwerfen, was ihr eingeschränkter Verstand nicht begreift, durch diese Betrachtung gerührt werden!

[nachdem der halbblinde alte Gelehrte seiner jungen Schülerin im Detail den Aufbau des menschlichen Auges erklärt hat]

E 343
Briefe an eine deutsche Prinzessin, Brief XLI
in der deutschen Übersetzung von 1769
zitiert nach dem Reprint Braunschweig 1986, p.47

Wie finde ich heraus, wo ich bin?

In der Tat: wenn ein Mensch nach einer langen Reise an eine Stelle – an Land oder auf See – gelangt, wird nichts für ihn von grösserem Interesse sein, als zu erfahren, an welchem Punkt der Erde er sich jetzt befindet, ob er in der Nähe irgend eines bekannten Ortes ist oder nicht, und welchen Weg er nehmen muss, um dorthin zu gelangen. Das einzige Mittel, um diesem Menschen aus seiner Verlegenheit zu helfen, wird sein, dass man ihn die Breite und die Länge des Ortes erfahren lässt, wo er sich befindet: aber welche Mittel soll er anwenden, um zu dieser Erfahrung zu kommen?

[Euler schlägt im Folgenden sechs Methoden für diese Ortsbestimmung vor; weil weder die Zeitmessung auf See noch die Bestimmung der magnetischen Inklination technisch genügend weit entwickelt sind, zieht er die Methode vor, die sich auf die Beobachtung der Gestirne, vor allem des Mondes, stützt.]

En effet si un homme après un long voyage arrive à un endroit, soit sur terre, soit sur mer, rien ne sauroit etre plus interessant pour lui, que d'apprendre en quel lieu de la terre il se trouve alors; s'il est proche de quelque pays connu, ou non ? et quel chemin il faut prendre pour y arriver ? Le seul moyen de tirer cet homme de son embarras sera sans doute de lui decouvrir la latitude et la longitude du lieu ou il se trouve: mais de quel moyen doit-il se servir pour parvenir à cette decouverte?

E 417
Lettres à une princesse d'Allemagne, Lettre CLX
St-Pétersbourg 1772
Opera III 12, p.73

Modellbildung in der Naturwissenschaft

Obschon es uns keinesfalls zusteht, in die innersten Geheimnisse der Natur einzudringen und so die wahren Gründe der Phänomene zu erkennen, kann es doch sein, dass eine Hypothese, die wir uns bilden, zur Erklärung mehrerer Phänomene genau so ausreicht, als wenn wir den wahren Grund durchschaut hätten: In dieser Weise bestimmt man heute mit glücklichstem Erfolg beinahe alle Himmelsbewegungen aus der Hypothese der universellen Anziehung, auch wenn diese Hypothese selbst völlig aus der Physik verbannt werden muss. Es wird deshalb vielleicht auch möglich sein, in ähnlicher Weise eine Hypothese zu ersinnen, welche zur Erklärung aller Phänomene der Luft und der Atmosphäre genügt. ... Ich stellte mir das Wesen der Luft nun so vor, als sei sie aus zahllosen kleinsten Bläschen oder Kügelchen zusammengesetzt, die von einer hauchdünnen wässrigen Haut umgeben sind und in deren Innerem die eigentliche Materie der Luft sich sehr rasch im Kreis herum bewegt: aus der Zentrifugalkraft dieser Bewegung entsteht, so scheint mir, die Elastizität der Luft.

[Im Folgenden leitet Euler die Verhältnisse von Dichte, Druck, Temperatur und Feuchtigkeit in der Atmosphäre aus dieser Vorstellung her – einer der ersten Ansätze, der makroskopische Effekte durch ein mikroskopisches Modell zu erklären versucht.]

Quanquam nobis in intima naturae mysteria penetrare, indeque veras caussas Phaenomenorum agnoscere neutiquam est concessum: tamen evenire potest, ut hypothesis quaedam ficta pluribus phaenomenis explicandis aeque satisfaciat, ac si vera caussa nobis esset perspecta, quemadmodum felicissimo successu omnes fere motus coelestes ex hypothesi attractionis universalis determinari solent, etiamsi haec ipsa hypothesis ex Physica prorsus sit profliganda. Quam ob rem fortasse simili modo quaepiam hypothesis excogitari poterit, quae omnibus Phaenomenis aëris et atmosphaerae explicandis sufficiat. ... Naturam aëris autem ita animo conceperam, quasi ex innumerabilibus minimis bullulis seu sphaerulis esset compositus, quae singulae cuticula tenuissima aquosa circumdarentur, intra quas propria aëris materia motu rapidissimo in gyrum circumagatur, in cuius vi centrifuga elasticitas aëris produci erat visa.

E 527
Coniectura circa naturam aëris, pro explicandis phaenomenis in atmosphaera observatis
Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae 1779/I (1782)
Opera II 31, p.307-308

Mathematik ohne Rechnen und Messen

Neben jenem Teil der Geometrie, der sich um Grössen dreht und zu allen Zeiten mit viel Aufwand gepflegt worden ist, gibt es ein anderes Teilgebiet, das noch heute weitgehend unbekannt ist: Leibniz hat es als erster erwähnt und “Geometrie der Lage” [*geometria situs*] genannt. Er sagt, dieses Fachgebiet beschäftige sich einzig mit der Bestimmung der Lage und der Ermittlung ihrer Eigenschaften; dabei solle man weder auf Grössen achten noch Rechnungen mit Grössen verwenden. Aber was für Probleme zu dieser “Geometrie der Lage” gehören und was für eine Methode man zu ihrer Lösung benutzen soll, ist noch nicht recht klar. Als deshalb kürzlich von einem gewissen Problem die Rede war, das zwar in den Bereich der Geometrie zu gehören schien, aber so beschaffen war, dass es weder die Bestimmung von Grössen erforderte noch eine Lösung mittels Berechnung von Grössen zuliess, zweifelte ich nicht daran, dass es zur Geometrie der Lage gehört, weil bei der Lösung bloss die Lage in Betracht kam und Rechnungen gar nichts nützten. Ich habe mir vorgenommen, meine Methode, die ich zur Lösung derartiger Probleme gefunden habe, hier als ein Musterbeispiel für die Geometrie der Lage vorzustellen.

[Das hier beschriebene Problem der Brücken von Königsberg und Eulers Lösung gelten als Keimzelle der Graphentheorie, eines wichtigen Teilgebiets dessen, was man heute Topologie nennt.]

Praeter illam geometriae partem, quae circa quantitates versatur et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit Leibnitzius, quam Geometriam situs vocavit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum neque calculo quantitatum utendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs geometriam pertineant et quali methodo in iis resolvendis uti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, ut neque determinationem quantitatum requireret neque solutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitavi, praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit usus. Methodum ergo meam, quam ad huius generis problemata solvenda inveni, tanquam specimen Geometriae situs hic exponere constitui.

E 53
Solutio problematis ad Geometriam Situs pertinentis
Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 8, 1736 (1741)
Opera I 7, p.1

Vergnügen und Erkenntnis – am Beispiel der Musik

Es ist eine ebenso wichtige wie eigentümliche Frage, weshalb eine schöne Musik in uns ein Gefühl von Vergnügen hervorruft. Die Gelehrten sind sich da nicht einig: Die einen behaupten, es sei eine blosse Laune, und das Vergnügen, das die Musik bereitet, sei völlig unbegründet, weil ja dieselbe Musik die einen erfreuen und den andern missfallen kann. ... Andere sagen, das Vergnügen, das man beim Anhören schöner Musik empfindet, beruhe auf der Wahrnehmung der Ordnung, die darin herrscht. ... Wer eine Musik anhört und dabei durch das Urteil seiner Ohren alle die Verhältnisse begreift, auf denen die Harmonie und der Takt beruhen, hat gewiss die vollkommenste Erfahrung dieser Musik, die möglich ist, während ein anderer, der diese Verhältnisse nur zum Teil oder gar nicht wahrnimmt, nichts davon begreift oder bloss eine unvollkommene Erfahrung davon hat. ... Man kann also sagen, dass das Vergnügen eine Erkenntnis erfordert, die nicht gar zu leicht ist, sondern ein wenig Mühe verlangt; die Erkenntnis muss uns sozusagen etwas kosten.”

C'est une question aussi importante que curieuse, pourquoi une belle musique excite en nous le sentiment du plaisir? Les savans sont bien partagés là-dessus. Il y en a qui pretendent, que c'est une pure bizarrerie, et que le plaisir que cause la musique, n'est fondé sur aucune raison, vu que la même musique peut être goûtée par quelques uns, et déplaire à d'autres. ... D'autres disent que le plaisir qu'on sent en entendant une belle musique, consiste dans la perception de l'ordre qui y regne. ... Qui entend une musique, et qui comprend, par le jugement de ses oreilles, toutes les proportions sur lesquelles tant l'harmonie que la mesure est fondée, il est certain qu'il a la plus parfaite connoissance de cette musique qui soit possible; pendant qu'un autre qui n'apperçoit ces proportions qu'en partie, ou point du tout, n'y comprend rien, ou en a une connoissance imparfaite. ... On dit donc que le plaisir demande une connoissance qui ne soit pas trop facile, mais qui exige quelque peine; il faut pour ainsi dire, que cette connoissance nous coute quelque chose.

E 343
Lettres à une princesse d’Allemagne, Lettre VIII
St-Pétersbourg 1768
Opera III 11, p.22-23

Theorie und Experiment

Hier schliesse ich meine Überlegungen ab, da ich, wie mir scheint, das aufgegebene Thema genügend erwogen und das Problem befriedigend gelöst habe. Ich habe es nicht für nötig gehalten, diese meine Theorie durch das Experiment zu bestätigen, da sie durchwegs aus den sichersten und unangreifbarsten Prinzipien der Mechanik abgeleitet ist und man deshalb nicht im geringsten daran zweifeln kann, ob sie wahr ist und in der Praxis angewendet werden kann.

[bemerkenswert selbstbewusst für einen noch nicht 20jährigen Schweizer, der noch nie ein seegängiges Schiff gesehen hat!]

Hic tandem hisce meis meditationibus finem impono, cum uti videtur materiam in problemate propositam satis perpenderim, problematique satisfecerim. Haud opus esse existimavi istam meam theoriam experientia confirmare, cum integra & ex certissimis & irrepugnabilibus principiis Mechanicis deducta, atque adeo de illa dubitari, an vera sit ac an in praxi locum habere queat, minime possit.

E 4
Meditationes de Problemate Nautico de Implantatione Malorum
Prix Paris II (1727)
Opera II 20, p.35

Naturerkenntnis mit geometrischen Mitteln

Schon lange haben die besten Mathematiker alle erkannt, dass die in diesem Buch behandelten Methoden nicht bloss in der Analysis selbst viel einbringen, sondern auch bei der Lösung physikalischer Probleme von grösstem Nutzen sind. Denn weil der Aufbau der ganzen Welt von ihrem weisen Schöpfer vollkommen eingerichtet worden ist, geschieht gar nichts in der Welt, bei dem sich nicht ein Maximum oder Minimum irgendeiner Grösse zeigt; und es steht deshalb ausser Zweifel, dass alle Wirkungen in der Welt eben so gut mit Hilfe der Extremalmethode aus ihren Zweckgründen [*causae finales*] bestimmt werden können wie aus ihren Ursachen [*causae efficientes*]. ... So wurde etwa die Krümmung eines Seils oder einer hängenden Kette auf beiden Wegen ermittelt: erstens *a priori* aus den Schwerekräften, zweitens aber auch mit der Extremalmethode, weil man begriff, dass das Seil diejenige Form annehmen muss, bei der der Schwerpunkt am tiefsten zu liegen kommt. Ebenso wurde die Krümmung von Lichtstrahlen, die ein Medium variabler Krümmung durchdringen, sowohl *a priori* als auch aus dem Prinzip berechnet, dass sie in der kürzesten Zeit zu einem gegebenen Punkt gelangen müssen.

Iam pridem summi quique Geometrae agnoverunt Methodi in hoc Libro traditae non solum maximum esse usum in ipsa Analysi, sed etiam eam ad resolutionem Problematum physicorum amplissimum subsidium afferre. Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat; quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes Mundi effectus ex causis finalibus ope Methodi maximorum et minimorum aeque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus. ... Hoc modo curvatura funis seu catenae suspensae duplici via est eruta, altera a priori ex sollicitationibus gravitatis, altera vero per Methodum maximorum ac minimorum, quoniam funis eiusmodi curvaturam recipere debere intelligebatur, cuius centrum gravitatis infimum obtineret locum. Similiter curvatura radiorum per medium diaphanum variae densitatis transeuntium tam a priori est determinata, quam etiam ex hoc principio, quod tempore brevissimo ad datum locum pervenire debeant.

E 65
Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes ...,
Additamentum I
Lausannae et Genevae 1744
Opera I 24, p.231

Modelle und ihre technische Umsetzung: ein Gedankenexperiment

Die folgende Fragestellung trat kürzlich auf, als es darum ging, eine ständige Brücke über den Fluss Newa zu konstruieren. Mehrere versuchten diese Aufgabe anzugehen und konstruierten dazu Modelle, nach deren Vorbild die Brücke selbst gebaut werden sollte; und die meisten meinten, die Brücke werde genügend Festigkeit haben, wenn nur das Modell mit einem gewissen Grad von Festigkeit ausgestattet sei. Sie nahmen also an, wenn das Modell eine Last tragen könne, die im Verhältnis derjenigen entspricht, welche die Brücke selbst wird aushalten müssen, so werde die ähnlich zum Modell konstruierte Brücke genügende Stärke haben. Aber dass dieser Schluss falsch ist, ist schon daraus ersichtlich, dass eine solche Brücke sicher nicht auf eine beliebige Länge – etwa von einer oder mehreren Meilen – ausgedehnt werden kann, ohne unter dem eigenen Gewicht zusammenzubrechen, wieviel Festigkeit das Modell auch immer gehabt haben mag. Es ist darum klar, dass die Tragfähigkeit der Brücke niemals aus derjenigen des Modells nach dem Prinzip der Ähnlichkeit festgelegt werden kann.

Orta est nuper haec quaestio occasione pontis perennis trans fluvium Nevam construendi. Cum enim plures hoc opus aggredi fuissent conati, atque in hunc finem modulos confecerint, ad quorum similitudinem ipse pons exstrui posset, plerique sunt arbitrati, pontem satis firmitatis esse habiturum, si modo modulus certo firmitatis gradu fuisset praeditus. Putarunt scilicet, si modo modulus simile onus gestare valeret, quale ipse pons sustinere debeat, tum nullum esse dubium, quin ipse pons secundum similitudinem moduli exstructus satis roboris esset habiturus. Hanc autem conclusionem esse fallacem, exinde satis est manifestum, quod talis pons certe non ad quantumvis magnam distantiam, veluti unius pluriumve milliarium extendi queat, quin proprio pondere corruat, quantumvis etiam roboris modulus habuisse videatur. Ex quo perspicuum est, firmitatem pontis neutiquam ex firmitate moduli secundum principium similitudinis definiri posse.

E 480
Regula facilis pro diiudicanda firmitate pontis ...
Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 20 (1775)
Opera II 17, p.220

Rechenregeln und ihre Begründung

Da nun die Erlernung der Rechenkunst ohne einigen Grund weder hinreichend ist, alle vorkommenden Fälle aufzulösen, noch den Verstand schärfet, als dahin die Absicht insonderheit gehen sollte: so hat man sich bemühet, in gegenwärtiger Anleitung von allen Regeln und Operationen den Grund so vorzutragen und zu erklären, dass denselben auch solche Leute, welche in gründlichen Abhandlungen noch nicht geübet sind, einsehen und verstehen ... Durch diese Einrichtung verhofft man also diesen Vortheil zu erlangen, dass die Jugend ausser der gehörigen Fertigkeit im Rechnen den wahren Grund von einer jeglichen Operation immer vor Augen habe, und dadurch zu gründlichem Nachdenken nach und nach angewöhnet werde. ... Dann ein jeglicher Mensch begreift und behält dasjenige im Gedächtnis viel leichter, wovon er den Grund und Ursprung deutlich einsieht, und weiss sich auch dasselbe bei allen vorkommenden Fällen weit besser zu Nutz zu machen.

E 17
Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii, St. Petersburg 1738
Opera III 2, p.3-4

Darstellung der Erde auf Karten

Man musste also über eine andere Art von Projektion nachdenken, die zunächst alle Meridiane als gerade Linien darstellt und bei der auch alle Breitengrade dieselbe Grösse bekommen; dann sollten aber auch noch alle Breitenkreise die Meridiane unter rechten Winkeln schneiden. Weil nun auf diese Weise unmöglich zu erreichen ist, dass die Grade der Breitenkreise überall das rechte Verhältnis zu den Graden der Meridiane behalten – nämlich jenes, das auf der Kugeloberfläche festzustellen ist –, schien es ratsam, lieber ein wenig von diesem Verhältnis abzuweichen als auf die erwähnten Vorteile zu verzichten. Es ergab sich deshalb die folgende wichtige Frage: Wie muss man die Meridiane mit den Breitenkreisen zusammensetzen, um von dem wahren Verhältnis, das die Längen- und die Breitengrade auf der Kugel unter sich haben, auf der ganzen Ausdehnung der Karte möglichst wenig abzuweichen? – am besten so, dass die Fehler kaum wahrnehmbar sind: eine solche Abweichung ist ja leicht zu verzeihen, wenn man dafür die gerade dargelegten Vorzüge erhält.

De alia igitur proiectionis ratione erat cogitandum, quae primo omnes Meridianos per lineas rectas exhiberet, in quibus etiam omnes gradus latitudinis eandem quantitatem obtinerent; tum vero, ut omnes Paralleli Meridianos ad angulos rectos traiicerent. Quoniam vero hoc modo neutiquam fieri potest, ut ubique gradus Parallelorum ad gradus Meridianorum iustam teneant rationem, quae scilicet in superficie sphaerica deprehenditur, consultum visum est ab ista ratione potius aliquantillum aberrare, quam memoratis commodis renunciare. Hinc igitur sequens quaestio maximi momenti est nata: quomodo Meridiani cum Parallelis constitui debeant, ut a vera ratione, quam gradus longitudinis et latitudinis in Sphaera inter se tenent, per totam mappae extensionem quam minime aberretur? ita scilicet, ut errores vix percipi possent, quandoquidem talis aberratio facile condonari poterit, si modo memorata commoda obtineantur.

E 492
De Proiectione Geographica Delisliana in Mappa Generali Imperii Russici usitata
Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae 1777/I (1778)
Opera I 28, p.289

Beobachtung in der reinen Mathematik

Die besonderen Eigenschaften der Zahlen, die bis heute gefunden und bewiesen worden sind, sind zweifellos in den meisten Fällen von den Entdeckern zunächst bloss beobachtet und an vielen Zahlenbeispielen bemerkt worden, ehe sie über einen Beweis nachgedacht haben. So ist etwa bei der Folge der Primzahlen, die um 1 grösser sind als ein Vielfaches von 4 – wie 5, 13, 17, 29, 37, 41 usw. – sicher schon lange beobachtet worden, dass jede einzelne von ihnen in zwei Quadrate zerlegt werden kann, bevor die Wahrheit dieser Beobachtung durch einen soliden Beweis nachgewiesen werden konnte. ... Daraus entnehmen wir, dass wir der Beobachtung und dem induktiven Schluss vom Besonderen aufs Allgemeine, denen die Wahrnehmung dieser höchst eleganten Eigenschaften zu verdanken ist, bei der Erforschung der Beschaffenheit von Zahlen auch heute noch eine Menge zutrauen und vom weiteren Verfolgen dieses Weges nicht ablassen sollten.

Inter tot insignes numerorum proprietates, quae adhuc sunt inventae ac demonstratae, nullum est dubium, quin pleraeque primum ab inventoribus tantum sunt observatae et in multiplici numerorum tractatione animadversae, antequam de iis demonstrandis cogitaverint. Ita de eo numerorum primorum ordine, qui unitate superant multiplum quaternarii, cuiusmodi sunt 5, 13, 17, 29, 37, 41 etc., ante sine dubio est observatum eorum singulos in duo quadrata secari posse, quam in eo elaboratum, ut huius observationis veritas per solidam demonstrationem evinceretur. ... Ex quibus merito colligimus in numerorum indole scrutanda observationi et inductioni, cui omnes has elegantissimas proprietates acceptas referre debemus, plurimum esse tribuendum ideoque ne nunc quidem ab hoc negotio ulterius prosequendo esse desistendum.

E 256
Specimen de usu observationum in Mathesi pura
Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 6, 1756/57 (1761)
Opera I 2, p.460-461

Fermats “letzter” Satz

Bei Fermat findet sich ein sehr schöner Satz, von dem er sagt, er habe ihn bewiesen: bei Gelegenheit der diophantischen Aufgabe, zwei Quadrate zu finden, deren Summe ein Quadrat ist, sagt er, es sei unmöglich, zwei Kuben zu finden, deren Summe ein Kubus ist, oder zwei vierte Potenzen, deren Summe eine vierte Potenz ist. Allgemein sei die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ stets unlösbar [in ganzen Zahlen], sobald $n > 2$. Ich habe nun zwar Beweise gefunden, dass $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ “unmöglich gleich” bedeutet; aber die Beweise für diese zwei Fälle sind so verschieden voneinander, dass ich keine Möglichkeit sehe, daraus einen allgemeinen Beweis der Aussage $a^n + b^n \neq c^n$ für alle $n > 2$ herzuleiten. Man sieht zwar – quasi durch ein Guckloch – ziemlich deutlich, dass die Gleichung “um so unmöglicher” sein muss, je grösser n ist; indessen habe ich noch nicht einmal beweisen können, dass die Summe zweier fünfter Potenzen keine fünfte Potenz sein kann. Dieser Beweis beruht allem Anschein nach auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, wird wohl alles Nachsinnen vergebens sein.

Bey *Fermat* findet sich noch ein sehr schönes *Theorema*, dessen *Demonstration* er sagt gefunden zu haben: Nehmlich bey Anlaß der *Diophantaeischen* Aufgabe zwey *Quadrata* zu finden deren *summ* ein *Quadrat* ist, sagt er daß es unmöglich sey zwey *cubos* zu finden deren *summ* ein *cubus* sey, und zwey *Biquadrata*, deren *summ* ein *Biquadratum*, und *generaliter* daß diese *Formul* $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sey, wann $n > 2$. Ich habe nun wohl *Demonstrationen* gefunden daß $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet; aber die *Demonstrationen* für diese zwey *casus* sind so von einander unterschieden, daß ich keine Möglichkeit sehe daraus eine allgemeine *Demonstration* für $a^n + b^n \neq c^n$ *si* $n > 2$ herzuleiten. Doch sieht man *quasi per transennam* ziemlich deutlich daß je grösser n ist, je unmöglicher die Formul seyn müsse; inzwischen habe ich noch nicht einmal beweisen können, daß *summa duarum potestatum quintarum* keine *potestas quinta* seyn könne. Dieser Beweiß beruhet allem Ansehen nach nur auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, möchte wohl alles Nachsinnen vergebens seyn.

R 883
Leonhard Euler an Christian Goldbach, 4.8.1753
erscheint in Opera IVA4