Wettbewerb Euler im Tram, Aufgabe 1

18. Juni 2007

1 Problemstellung

Der Basler Mathematiker Leonhard Euler hat am 15. April 1707 das Licht der Welt erblickt. Seine Nachfahren, die Zwillinge Leonhard und Peter Euler, sind am 15. Januar 1977 zur Welt gekommen. Gesucht ist der Tag, an dem die Zwillinge zusammen genau ein Drittel so alt sind wie der Mathematiker Euler.

2 Antwort

Der gesuchte Tag ist der 28. Dezember 2030.

3 Übersetzung in ein mathematisches Problem

In einem ersten Schritt versuchen wir, die Aufgabe in Form einer Gleichung zu schreiben. Dazu nehmen wir vereinfachend an, dass alle drei Beteiligten um Mittag zur Welt gekommen sind, dass es also völlig genügt, in ganzen Tagen zu rechnen. Für einen Tag d bezeichne $x(d)$ die Anzahl Tage, die seit dem 15. April 1707 vergangen sind. Also ist also $x(d)$ genau das Alter des alten Eulers am Tag d in Tagen. (Z.B. haben wir dann $x(16.\text{ April }1707) = 1$ oder $x(15.\text{ April }1708) = 366$ (das Jahr 1708 war ein Schaltjahr)).

Analog bezeichne $y(d)$ die Anzahl Tage, die seit dem 15. Januar 1977 verstrichen sind - es ist das genau das Alter der jungen Euler am Tag d. Z.B. gilt dann $y(15.\text{ Februar }1977) = 31$.

Nun können wir die gesuchten Gleichungen schreiben: Gesucht ist der Tag d, an dem gilt:

$$2 \cdot y(d) = \frac{1}{3} \cdot x(d). \tag{1}$$

Zudem wissen wir, dass gilt:

$$x(d) = y(d) + x(15.\text{ Januar }1977), \tag{2}$$

denn kennen wir $y(d)$, das Alter der jungen Euler, so können wir das Alter $x(d)$ des alten Euler ausrechnen, indem wir zu $y(d)$ die Anzahl Tage zwischen dem 15. Januar 1977 und dem 15. April 1707 dazuzählen - und diese Anzahl ist genau $x(15.\text{ April }1977)$.

4 Lösung des Problems

Wir wollen die gefundenen Gleichungen nun lösen. Dazu vereinfachen wir die Gleichungen, indem wir die zweite in die erste einsetzen: Wir kriegen dann

$$2 \cdot y(d) = \frac{1}{3} \cdot (y(d) + x(15.\text{ Januar }1977)),$$

oder

$$y(d) = \frac{1}{5} \cdot x(15.\text{ Januar } 1977). \tag{3}$$

Diese Gleichung wollen wir nun lösen. Dazu berechnen wir x(15. Januar 1977) (und erinnern uns daran, dass zwischen 1707 und heute keine Kalenderreform stattgefunden hat). Zwischen 1707 und 1977 sind 269 vollständige Jahre verstrichen (1708, 1709, ..., 1976). Davon waren 66 Jahre Schaltjahre. (Ein Jahr ist ein Schaltjahr, wenn es durch vier teilbar ist und nicht durch 100 teilbar ist, oder wenn es durch 400 teilbar ist. Insbesondere waren 1800 und 1900 keine Schaltjahre, während das Jahr 2000 eines war). Das gibt bereits $269 \cdot 365 + 66 = 98251$ Tage. Dazu kommen noch die Tage vom 15. April 1707 bis zum 31. Dezember 1707 (260 Tage) und die Tage vom 1. Januar 1977 bis zum 15. Januar 1977 (15 Tage). Addieren wir, so finden wir

$$x(15.\text{ Januar } 1977) = 98526.$$

Setzen wir dies in Gleichung 3 ein, so erhalten wir

$$y(d) = 19705.2$$

Gesucht ist also der Tag d, an dem seit dem 15. Januar 1977 genau 19705.2 Tage verstrichen sind. Um einen ersten Anahltspunkt zu kriegen, dividieren wir diese 19705.2 Tage durch 365 Tage pro Jahr und kriegen etwa 54 Jahre. Zählen wir diese 54 Jahre zum 15. Januar 1977, so landen wir am 15. Januar 2031. Wir rechnen nach, wie weit wir mit dieser Schätzung daneben liegen:

$$y(15.\text{ Januar } 2031) = 365 \cdot 54 + 13 = 19723,$$

da zwischen 1977 und 2031 genau 13 Schaltjahre lagen. Das Ergebnis zeigt, dass die jungen Euler am 15. Januar 2031 bereits knapp 18 Tage zu alt sind. Wir gehen also vom 15. Januar 2031 diese 18 Tage zurück und landen am 28. Dezember 2030:

$$y(28.\text{ Dezember } 2030) = 19705.$$

5 Ergebnis

Wir haben somit gefunden, dass am Mittag des 28. Dezember 2030 der alte Euler ein klein wenig mehr als dreimal so alt sein wird als die jungen Euler zusammen, am 29. Dezember 2030 um Mittag hingegen werden die jungen Euler zusammen schon etwas zu alt sein.

Falls man die genauen Geburtszeiten wüsste, so könnte man den exakten Zeitpunkt bestimmen, an dem die Zwillinge zusammen genau ein Drittel so alt sind wie der alte Euler. Aus den obigen Überlegungen und Rechnungen ergibt sich leicht, dass dieser Zeitpunkt irgendwann zwischen dem 28. Dezember 2030 um 0:00 Uhr und dem 29. Dezember 2030 um 9:36 Uhr liegt.

Dieses Resultat können Sie jetzt, so Sie unseren Rechenkünsten mit Skepsis begegnen, z.B. mit diversen Kalendern im Internet verifizieren.