Wettbewerb Euler im Tram, Aufgabe 2

25. Juni 2007

1 Problemstellung

Wir wollen die Zahl 1707 (das Geburtsjahr Eulers) als Summe von möglichst wenig Quadratzahlen schreiben.

2 Ein paar Überlegungen zum Anfang

Viele von Ihnen, liebe Rätselfreunde, haben die Aufgabe richtig und vollständig gelöst, indem Sie ein Computerprogramm geschrieben haben, das Ihnen Lösungen sucht. Das ist natürlich zulässig (zumindest wenn wir glauben, dass unser Computer fehlerfrei arbeitet und dass Sie Ihr Computerprogramm fehlerfrei programmiert haben).

Hier möchte ich eine Methode vorstellen, mit der wir ohne zuviel Rechenaufwand beweisen können, dass 1707 nicht als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden kann, und mit der wir alle sechs Möglichkeiten, 1707 als Summe dreier Quadratzahlen zu schreiben, finden können. Die verwendete Methode heisst *Rechnen mit Rest* und ist Ihnen vielleicht aus der Schule bekannt: Dort haben wir zum Beispiel gesagt, dass 37 dividiert durch 5 mit Rest als Resultat 7 Rest 2 hat, da $35 = 7 \cdot 5 + 2$. Während wir uns in der Schule vielleicht eher für die 7 im Resultat oben interessiert haben, ist für uns jetzt der Rest, also im Beispiel die 2, von Interesse. Ein paar Beispiele dazu:

1. Die Zahl 15 ist durch 5 teilbar. Da der Rest bei der Division also Null ist, wollen wir dafür schreiben:

   $$15 \equiv 0 \text{ (modulo 5)}.$$

   Beachten Sie, dass dies nur eine Schreibweise ist.

2. Ein weiteres Beispiel: Da $41 = 13 \cdot 3 + 2$ gilt, haben wir

   $$41 \equiv 2 \text{ (modulo 3)}.$$

Die wichtige Bemerkung ist nun die folgende: Kennen wir eine Zahl a nicht, wissen aber von a, was sich bei Teilung mit Rest durch verschiedene andere Zahlen ergibt, so sind die Möglichkeiten für a oft schon stark eingeschränkt. (Ist z.B. $a \equiv 3$ (modulo 4) und $a \equiv 2$ (modulo 5), so muss a aus der Liste $\{..., -33, -13, 7, 27, 47, ...\}$ stammen.) Wir werden nun solche Restbedingungen für 1707 aufstellen und daraus die Zahl der Möglichkeiten, wie sich 1707 als Summe von Quadratzahlen schreiben lässt, so stark einschränken, dass wir die Fälle alle einzeln durchgehen können.

3 1707 ist nicht die Summe zweier Quadratzahlen

Eine einfache Beobachtung zeigt uns, dass eine Quadratzahl immer Rest 0 oder Rest 1 bei Teilung durch 4 hat: Ist a eine gerade Zahl, so ist $a = 2n$ für eine ganze Zahl n und wir finden

$$a^2 \equiv (2n)^2 \equiv 4n^2 \equiv 0 \text{ (modulo 4)},$$

weil $4n^2$ durch 4 teilbar ist mit Quotient n^2. Ist a hingegen ungerade, so ist $a = 2n + 1$ für eine ganze Zahl n und es folgt

$$a^2 \equiv (2n+1)^2 \equiv (4n^2 + 4n + 1) \equiv 1 \text{ (modulo 4)},$$

da $4n^2 + 4n$ durch 4 teilbar ist mit Quotient $n^2 + n$, während bei der Teilung von 1 durch 4 der Rest 1 übrig bleibt.

Damit können wir zeigen, dass 1707 nicht als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden kann. Es gilt, dass $1707 = 426 \cdot 4 + 3$, also ist $1707 \equiv 3$ (modulo 4). Betrachten wir aber zwei Quadratzahlen a^2 und b^2, so gilt wegen der Beobachtung oben für deren Summe, dass $a^2 + b^2 \equiv 0$ (modulo 4), falls a und b beide gerade sind; $a^2 + b^2 \equiv 1$ (modulo 4), falls eine der beiden gerade und eine ungerade ist; und $a^2 + b^2 \equiv 2$ (modulo 4), falls beide ungerade sind. In keinem Fall aber ergibt sich wie bei 1707 der Rest drei. Wir haben also in guter mathematischer Manier *bewiesen*, dass es keine ganzen Zahlen a und b geben kann mit $a^2 + b^2 = 1707$.

4 1707 als Summe dreier Quadratzahlen

Das folgende Beispiel zeigt, dass 1707 die Summe dreier Quadratzahlen ist:

$$1707 = 41^2 + 5^2 + 1^2.$$

Gibt es andere Lösungen? Wie findet man sie? Auch diese Fragen lassen sich mit der obigen Methode beantworten. Da $1707 \equiv 3$ (modulo 4) gilt und da $a^2 \equiv 0$ (modulo 4) oder $\equiv 1$ (modulo 4) je nachdem, ob a gerade oder ungerade ist, sehen wir, dass aus $1707 = a^2 + b^2 + c^2$ für ganze Zahlen a, b und c folgt, dass alle drei Zahlen a, b und c ungerade sein müssen.

Weiter rechnen wir Rest 5. Es gilt: $1707 \equiv 2$ (modulo 5). Andererseits finden wir folgende Situation:

$a^2 \equiv 0$ (modulo 5), falls $a \equiv 0$ (modulo 5),
$a^2 \equiv 1$ (modulo 5), falls $a \equiv 1$ (modulo 5),
$a^2 \equiv 4$ (modulo 5), falls $a \equiv 2$ (modulo 5),
$a^2 \equiv 4$ (modulo 5), falls $a \equiv 3$ (modulo 5),
$a^2 \equiv 1$ (modulo 5), falls $a \equiv 4$ (modulo 5).

Nun gibt es genau zwei Möglichkeiten, aus den Zahlen 0, 1 und 4 eine Summe aus drei Summanden zu schreiben, deren Rest bei Teilung durch 5 gleich 2 wird: $0+1+1 \equiv 2$ (modulo 5) und $4+4+4 \equiv 2$ (modulo 5). Wir folgern, dass genau einer der folgenden Fälle auftritt:

Fall 1: a, b und c sind ungerade und genau eine der drei Zahlen ist durch 5 teilbar und für die beiden anderen ergibt Teilung durch 5 den Rest 1 oder 4. Kurz gesagt:

$$a \in \{5, 15, 25, 35\}, \quad b, c \in \{1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, 39, 41\}.$$

Fall 2: a, b und c sind ungerade und bei Teilung durch 5 ergibt sich für alle drei Zahlen der Rest 2 oder 3. Also:

$$a, b, c \in \{3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37\}.$$

Dies schränkt die Möglichkeiten schon massiv ein. Wir gehen die einzelnen Fälle durch. Zuerst nehmen wir an, dass a durch 5 teilbar ist.

$a = 5$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 5^2 = 1682$. Indem wir Rest 3 rechnen, finden wir, dass $b^2 + c^2 \equiv 1682 \equiv 2 \pmod{3}$. Da $1^2 \equiv 11^2 \equiv 19^2 \equiv 29^2 \equiv 31^2 \equiv 41^2 \equiv 1 \pmod{3}$ und $9^2 \equiv 21^2 \equiv 39^2 \equiv 0 \pmod{3}$ gilt, müssen sowohl b und c aus der Menge $\{1, 11, 19, 29, 31, 41\}$ stammen. Zudem dürfen nicht b und c beide kleiner als 29 sein, da andernfalls $b^2 + c^2 < 1682$ gälte. Versuchen wir $b = 29$. Wir finden: $1682 - 29^2 = 841 = 29^2$. Dies liefert eine Lösung $a = 5, b = c = 29$. Mit $b = 31$ folgt, dass $c^2 = 1682 - 31^2 = 721$. Da 721 keine Quadratzahl ist, liefert dies keine Lösung. Zuletzt versuchen wir es mit $b = 41$ und finden, dass $c^2 = 1682 - 41^2 = 1$, also $c = 1$. Dies gibt eine zweite Lösung $a = 5, b = 41, c = 1$. Wir haben also die Lösungen

$$1707 = 41^2 + 5^2 + 1^2$$

und

$$1707 = 29^2 + 29^2 + 5^2$$

gefunden.

$a = 15$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 15^2 = 1482$. Teilen mit Rest durch 3 impliziert jetzt (da $1482 \equiv 0 \pmod{3}$), dass $b, c \in \{9, 21, 39\}$. Damit $b^2 + c^2 = 1482$ erfüllt ist, können nicht b und c beide kleiner als 28 sein. Nun ist $1482 - 39^2 < 0$, also kriegen wir mit $a = 15$ keine Lösung.

$a = 25$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 25^2 = 1082$. Teilen mit Rest durch 3 ergibt wieder, dass $b, c \in \{1, 11, 19, 29, 31, 41\}$. Zudem muss entweder b oder c mindestens 24 sein (sonst ist die Summe der Quadrate kleiner als 1082). Wir versuchen also $1082 - 29^2 = 241$. Dies gibt keine Lösung, da 241 keine Quadratzahl ist. Wir versuchen also $1082 - 31^2 = 121 = 11^2$. Also finden wir eine dritte Lösung mit $a = 25, b = 31, c = 11$. Nun ist $1082 - 41^2 < 0$, also finden wir mit 41 keine Lösung. Die einzige Lösung mit $a = 25$ ist also

$$1707 = 31^2 + 25^2 + 11^2.$$

$a = 35$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 35^2 = 482$. Teilen mit Rest durch 3 liefert, dass $b, c \in \{1, 11, 19, 29, 31, 41\}$. Da schon $29^2 > 482$ ist, folgt, dass $b, c \in \{1, 11, 19\}$ liegen. Wir versuchen $482 - 19^2 = 121 = 11^2$. Dies gibt als weitere Lösung

$$1707 = 35^2 + 19^2 + 11^2.$$

Nun bleibt noch der Fall, dass $a, b, c \in \{3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37\}$.

$a = 3$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 3^2 = 1698$. Teilen mit Rest durch 3 ergibt, dass $b, c \in \{3, 27, 33\}$. Man sieht leicht, dass es keine Lösung gibt.

$a = 7$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 7^2 = 1658$. Teilen mit Rest durch 3 ergibt, dass $b, c \in \{7, 13, 17, 23, 37\}$. Da $23^2 + 23^2 < 1658$, muss $b = 37$ sein. Tatsächlich ist $1658 - 37^2 = 17^2$ und wir haben eine neue Lösung gefunden:

$$1707 = 37^2 + 17^2 + 7^2.$$

$a = 13$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 13^2 = 1538$. Teilen mit Rest durch 3 ergibt, dass $b, c \in \{13, 17, 23, 37\}$. Da $23^2 + 23^2 < 1538$, muss $b = 37$ sein. Tatsächlich ist $1538 - 37^2 = 13^2$ und wir haben wieder eine neue Lösung gefunden:

$$1707 = 37^2 + 13^2 + 13^2.$$

$a = 17$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 17^2 = 1418$. Teilen mit Rest durch 3 ergibt, dass $b, c \in \{17, 23, 37\}$. Da $23^2 + 23^2 < 1418$, muss $b = 37$. Dies führt zur Lösung $1707 = 37^2 + 17^2 + 7^2$, die wir oben schon gefunden haben.

$a = 23$. Dann ist $b^2 + c^2 = 1707 - 23^2 = 1178$. Wie oben sehen wir, dass $b = 37$ sein muss. Allerdings ist $37^2 > 1178$ und wir finden keine Lösung mehr.

$a > 23$. Dann ist $3 \cdot a^2 > 1707$. Also muss b oder $c \leq 23$ sein, und diese Lösungen haben wir oben schon alle gefunden.

Wir habens also geschafft und fassen zusammen: Es gibt genau sechs Möglichkeiten, die Zahl 1707 als Summe von drei Quadratzahlen zu schreiben:

$$\begin{aligned}
1707 &= 41^2 + 5^2 + 1^2 \\
&= 37^2 + 17^2 + 7^2 \\
&= 37^2 + 13^2 + 13^2 \\
&= 35^2 + 19^2 + 11^2 \\
&= 31^2 + 25^2 + 11^2 \\
&= 29^2 + 29^2 + 5^2.
\end{aligned}$$

5 Haben Sie übrigens gewusst...?

Ist es ein Zufall, dass sich die Zahl 1707 mit nur drei Quadratzahlen schreiben lässt? Nicht alle Zahlen lassen sich als Summe von drei Quadratzahlen schreiben, so geht es z.B. für die Zahl 7 nicht. Hingegen gilt erstaunlicherweise, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen schreiben lässt. Dieses Resultat stammt aus dem Jahre 1770 und wurde von Joseph-Louis Lagrange, einem Bekannten Leonhard Eulers, bewiesen.

Wenn wir uns erlauben anstatt nur mit ganzen Zahlen auch mit so genannt 'ganzen komlexen Zahlen' zu rechnen (das sind Zahlen der Form $a + bi$, wo $i^2 = -1$ gilt und wo a und b gewöhnliche ganze Zahlen sind), so ist es möglich, 1707 sogar als Summe von nur zwei Quadratzahlen zu schreiben, es gilt dann z.B. $1707 = 286^2 + (283i)^2$.