Wettbewerb Euler im Tram, Aufgabe 3

9. Juli 2007

1 Problemstellung

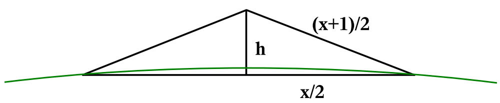
Eine Schnur, welche satt um den Äquator einer Kugel von der Grösse der Erde gespannt ist, wird um 1 cm verlängert und an einer Stelle gehoben und dadurch wieder straff gespannt. Wie gross ist die entstehende Lücke und kann eine Maus darunter durchschlüpfen?

2 Antwort

Die entstehende Lücke misst 5.636 Meter und es reicht spielend für die Maus.

3 Eine einfache Überlegung zum Anfang

Wie kann es sein, dass eine so kleine Verlängerung der Schnur zu einer genügend grossen Lücke führt? Viele Leser haben erst vermutet, dass der Platz für die Maus nicht reicht und trotzdem konnte sich mancher und manche mit mathematischen Betrachtungen oder Experimenten vom Gegenteil überzeugen. Um dem Phänomen auf die Spur zu kommen ist folgende Überlegung hilfreich: Nehmen wir mal an, dass sich die Schnur straff gespannt auf einer Länge von x cm über den Boden erhebt. Ist x nicht allzu gross so lässt sich die Erdkrümmung sicher vernachlässigen und die Schnur bildet über einer (geraden) Strecke von Länge x ein gleichschenkliges Dreieck, wobei beide Schenkel Länge $\frac{x+1}{2}$ haben, denn der hinzugefügte Zentimeter Schnur verteilt sich zu gleichen Teilen auf beide Seiten, siehe Skizze. Die Höhe über dem Boden, die wir im folgenden mit h bezeichnen, lässt sich nun sehr einfach



mit dem Satz von Pythagoras bestimmen, der besagt: Im rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$, wobei a und b die Längen der Katheten und c die Länge der Hypotenuse, also der grössten Seite bezeichnet. Aufgelöst auf eine Kathete ergibt das $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Angewendet auf das rechtwinklige Dreieck mit Katheten h und $\frac{x}{2}$ und Hypotenuse $\frac{x+1}{2}$ resultiert also

$$h = \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1},$$

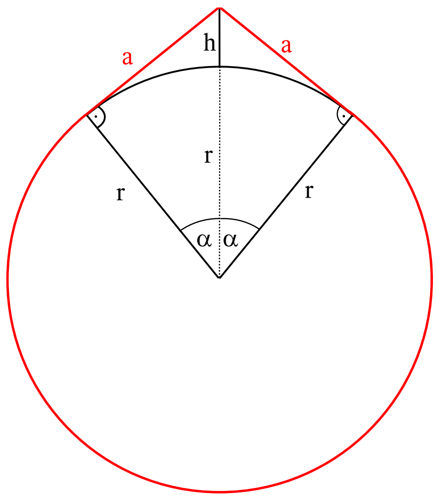
was keineswegs konstant in x ist, sondern mit der Wurzel von x wächst! Erhebt sich die Schnur also auf einer Strecke von nur einem Meter über den Boden ($x = 100$ in Zentimetern), so resultiert daraus schon eine Lücke von $h = \frac{1}{2}\sqrt{201}$, was gut 7 cm sind. Da mag die Maus schon locker durch, sogar mit einem schönen Stück Käse auf dem Buckel! Sie können dies experimentell nachprüfen, was einige einfallsreiche Löser in der Tat gemacht haben: Man nehme zwei Schnüre, eine davon von einem

Meter Länge, die andere einen Zentimeter länger, befestige die kürzere Schnur satt anliegend auf dem Küchentisch und die Enden der längeren Schnur befestige man an den gleichen Stellen wie diejenigen der kürzeren Schnur. Dann hebe man die längere Schnur in der Mitte an und messe die entstehende Lücke. Wenn Sie ca. 7 cm erhalten, dann haben sie die obige Rechnung experimentell verifiziert. Haben Sie ein solches Experiment schon vor Einsendeschluss gemacht, so verdienen Sie vielleicht noch keinen Büchergutschein, aber sicher ein grosses Kompliment! In der Mathematik ist es häufig nützlich etwas zu basteln um eine gute Vorstellung der Dinge zu erhalten, das wusste schon Euler zu berücksichtigen. Übrigens werden wir später sehen, dass sich die Schnur in Tat und Wahrheit auf einer Länge von ca. 17 km erhebt. Mit dieser Länge ist es schwieriger Experimente zu machen, aber die Formel liefert dann immer noch eine Antwort: $h = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 1.7 \cdot 10^6 + 1}$, was etwa 9.2 Metern entspricht. Da die Erdkrümmung, die bei dieser Distanz schon eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt, etwas davon wegnimmt, erhält man natürlich ein bisschen weniger, womit die Lösung von 5.636 Metern nun also durchaus plausibel erscheint.

Nun gehen wir aber einen Schritt weiter und versuchen die genaue Grösse der Lücke mit mathematischer Präzision zu ermitteln.

4 Lösungsweg

Es bezeichne $U = 4 \cdot 10^9$ den Umfang des Äquators (in Zentimetern), $r = \frac{U}{2\pi}$ den Kugelradius. Auf der Skizze rechts ist die Äquatorebene dargestellt, in rot die verlängerte Schnur von Länge $L = U + 1$, die nach oben straff gezogen ist. Es sei α der Winkel zwischen der Stelle wo die Höhe gemessen wird (oben) und einer der beiden Stellen wo die Schnur sich von der Kugel löst und es sei a die Distanz zwischen diesen beiden Stellen. Die Schnur besteht aus einem Kreisanteil von Länge $U - 2r\alpha = 2(\pi - \alpha)r$ und den beiden geraden Streckenteilen von Länge a.



Es gilt somit:

$$L = 2(\pi - \alpha)r + 2a = U + 1 = 2\pi r + 1,$$

oder vereinfacht

$$a - \alpha r = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Da a und r die Längen der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck mit a gegenüberliegendem Winkel α sind, gilt zudem $\tan\alpha = \frac{a}{r}$, also liefert uns Gleichung (1) die Beziehung

$$\tan\alpha - \alpha = \frac{1}{2r} = \frac{\pi}{U} \tag{2}$$

Um den Winkel α zu erhalten ist nun Gleichung 2 zu lösen. Dafür gibt es keine einfache Formel, jedoch können wir es mit einer einfachen Näherung ziemlich genau oder mit einem numerischen Verfahren sogar beliebig genau lösen. Begnügen wir uns vorerst mit der einfachen Näherung: Dazu verwenden wir die Taylorreihe von $\tan\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \ldots$, wobei wir die Terme höherer als dritter Ordnung vernachlässigen (wir erwarten einen kleinen Winkel α, darum ist die Näherung ziemlich gut). So erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{3}\alpha^3 = \frac{\pi}{U},$$

also

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{U}},$$

d.h. 0.00133067 Radian. Die Länge der von der Kugel losgelösten Schnur ist somit $2 \cdot \alpha r + 1 = \frac{\alpha U}{\pi} + 1$, was einer Länge von 16.94 Kilometern entspricht, wie oben behauptet wurde. Uns interessiert jedoch eigentlich die Grösse der Lücke, unter der die Maus durchkriechen soll. Dazu schauen wir uns nochmals das rechtwinklige Dreieck an. Der Cosinus von α ergibt sich durch das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse, also

$$\cos \alpha = \frac{r}{r+h},$$

was auf h aufgelöst

$$h = r\Big(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\Big) = \frac{U}{2\pi}\Big(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\Big)$$

ergibt. Mit $U = 4 \cdot 10^9$ und $\alpha = 0.00133067$ erhalten wir eine Lücke von $h = 563.6$ cm, wie oben behauptet. Dies reicht nun definitiv für die Maus, auch wenn sie, wie einer unserer Löser so schon geschrieben hat, auf dem Rücken eines Elefanten reitet.

5 Numerische Methoden

Um Skepsis bei der Verwendung der Näherung für den Tangens von α entgegenzutreten, sei hier Gleichung 2 nun auch mit einem numerischen Verfahren mit beliebiger Präzision gelöst. Wir verwenden dazu das Tangentenverfahren von Newton und Raphson, das wohl Euler auch bekannt gewesen sein dürfte. Es ist dies ein Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion, in unserem Fall gegeben durch

$$f(\alpha) = \tan \alpha - \alpha - \frac{\pi}{U}.$$

Zur Anwendung des Verfahrens wählt man einen Startwert α_0 als erste Schätzung und konstruiert dazu schrittweise (genauere) Approximationen durch die Vorschrift

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \text{ für } i = 0, 1, \ldots$$

Wir nehmen mal an, noch keine genaue Vorstellung vom Ergebnis zu haben und wählen als Startwert $\alpha_0 = 0.1$. Dann ergeben sich der Reihe nach die ungefähren Werte 0.1, 0.044, 0.030, 0.020, 0.013, 0.0088, 0.0058, 0.0039, 0.0027, 0.0019, 0.00148, 0.00134, 0.00133, 0.0013307, 0.00133067, 0.001330671. Man beobachtet, dass die Folge der Werte einem Grenzwert zustreben, welcher auf mindestens 8 Stellen nach dem Komma mit dem obigen Näherungswert übereinstimmt. Man könnte den Abbrechfehler explizit abschätzen. Der interessierte Leser findet die Formel dazu in gängigen Formelsammlungen.

Übrigens führt auch das einfachere Iterationsverfahren

$$\alpha_{i+1} = g(\alpha_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

angewendet auf die Funktion

$$g(\alpha) = \arctan\Big(\alpha + \frac{\pi}{U}\Big)$$

auf eine gute Approximation für α. Es ist einfach zu zeigen, dass dieses Verfahren in unserer Situation (bei Startwert $\alpha_0 \geq 0$) ebenfalls dem gleichen Grenzwert zustrebt. Der Nachteil ist bloss, dass dieses Verfahren hier extrem langsam konvergiert, so dass man einige Tausend Iterationsschritte machen müsste um die gleiche Genauigkeit zu erhalten, wie sie das Newton-Raphson Verfahren in einem Dutzend Schritten lieferte.