

Wettbewerb Euler im Tram, Aufgabe 4

20. August 2007

Liebe Rätsel- und Eulerfreunde. Bei dieser Aufgabe kann gebastelt werden.

1 Problemstellung

Es soll ein Polyeder, das heisst ein durch ebene Vielecke begrenzter Körper im Raum, mit 14 Ecken, 31 Kanten und 15 Flächen konstruiert werden.

2 Lösung des Problems

Einigen von Ihnen ist aufgefallen, dass die Existenz eines solchen Polyeders scheinbar der berühmten Polyederformel Eulers widerspräche. Diese Formel sagt, dass für ein *konvexes* Polyeder die folgende Identität gilt:

$$\#Ecken - \#Kanten + \#Flächen = 2.$$

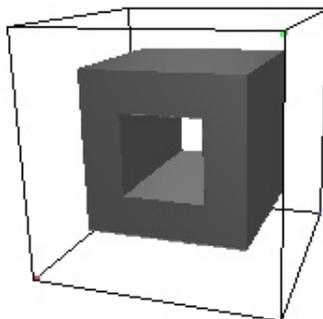
Bei uns ist allerdings

$$\#Ecken - \#Kanten + \#Flächen = 14 - 31 + 15 = -2.$$

Weshalb ist dies kein Widerspruch? Die Polyederformel gilt nur für konvexe Polyeder. Sobald wir aber z.B. ein Polyeder mit Löchern betrachten, ist dieses nicht mehr konvex und die Formel gilt auch nicht mehr. So hat Henri Poincaré, ein französischer Mathematiker und Physiker des späten neunzehnten und frühen zwanzigsten Jahrhunderts, Eulers Formel für nicht-konvexe Polyeder verallgemeinert. Die Euler-Poincaré-Formel besagt nun, dass für ein Polyeder mit Löchern gilt:

$$\#Ecken - \#Kanten + \#Flächen = 2 - 2 \cdot \#Löcher,$$

wenn alle begrenzenden Flächen selber keine Löcher aufweisen. Wir geben ein Beispiel, das diese Formel illustriert. Wir starten mit einem gewöhnlichen Würfel. Der Würfel ist konvex, hat 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen. Tatsächlich gilt auch $8 - 12 + 6 = 2$, wie es sein sollte. Nun bohren wir ein viereckiges Loch durch zwei gegenüberliegende Flächen. Das Bild illustriert den Würfel (grau) und das Loch darin:



Das Bild stammt von www.cb.uu.se/~tc18/code_data_set/3D_images.html. Beim Bohren entstehen neu 8 Ecken, 12 Kanten und 4 Flächen. Nun weisen aber die Flächen auf der Vorder- und Rückseite Löcher auf. Das korrigieren wir, indem wir auf der Vorder- und auf der Rückseite jeweils eine Kante von jeder äusseren Ecke zur nächstgelegenen inneren Ecke ziehen, also 8 neue Kanten einfügen. Wenn wir Buch führen, so finden wir:

$$\#Ecken - \#Kanten + \#Flächen = (8 + 8) - (12 + 12 + 8) + (6 + 4 + 6) = 0 = 2 - 2 \cdot \#Löcher.$$

Für unser gesuchtes Polyeder brauchen wir nach der Euler-Poincaré-Formel also zwei Löcher. Nun ist es aber gar nicht einfach, ein Polyeder mit zwei Löchern zu basteln, das 'nur' 14 Ecken und 15 Flächen hat. Wenn Sie sich hinsetzen und das ausprobieren, werden Sie feststellen, dass man relativ schnell zu viele Ecken und Flächen kriegt. Dass es aber möglich ist, zeigt die angehängte Bastelanleitung. Drucken Sie sie aus, vergrössern Sie sie massstäblich auf dickes Papier, schneiden Sie die Stücke aus, ritzen Sie die Linien innerhalb der Stücke ein und beginnen Sie den Nummern folgend zu verkleben. Sind Sie bei der Nummer 13 angekommen, so halten Sie zwei Stücke in den Händen, die Sie dann einfach zum gesuchten Polyeder zusammenkleben können. Viel Spass! Das gebastelte Polyeder hat nun 14 Ecken, 31 Kanten und 15 Flächen. Ein ähnliches Polyeder mit 14 Ecken, 31 Kanten und 15 Flächen hat Herr H. Leupp aus Schaffhausen aus Karton gebastelt und eingeschickt. Hier sind ein paar Fotos von diesem schönen Modell.

