Wettbewerb Euler im Tram, Aufgabe 5

27. August 2007

Liebe Rätsel- und Eulerfreunde. Bei dieser Aufgabe stehen Wahrscheinlichkeiten im Zentrum, ein Gebiet, das Laien und Profis oft aufs Glatteis führt. Versuchen wir also den Boden nicht unter den Füssen zu verlieren...

1 Problemstellung

Unter drei Kandidaten soll ein Professor gewählt werden. Dazu gibt es ein halbwegs aufwändiges Verfahren: Die zwölf Wahlberechtigten werden zufällig in zwei Gruppen à sechs Personen geteilt. In jeder Gruppe wird zwischen den Kandidaten gewählt, ein relatives Mehr genügt innerhalb einer Gruppe für die Wahl. Verfehlen alle Kandidaten das relative Mehr, entscheidet das Los zwischen den Kandidaten mit den meisten Stimmen. So wählen beide Gruppe einen Kandidaten. Schliesslich entscheidet das Los zwischen den von den beiden Gruppen vorgeschlagenen Kandidaten.

Nun wissen wir, dass von den zwölf Wahlberechtigten sieben für Ben, einer für Dan und vier für Leo stimmen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Leo zum Professor gewählt wird?

2 Eine Vorbemerkung zu Wahrscheinlichkeiten

Stellen Sie sich vor, Sie spielen Yatzi. Sie haben bis aufs Yatzi alle Felder schon gefüllt und brauchen im letzten Zug nur noch ein Yatzi. Zweimal haben Sie bereits gewürfelt und bis jetzt sieht es gar nicht rosig aus: Alle Würfel zeigen verschiedene Augenzahlen. Für den letzten Wurf nehmen Sie deshalb nochmals alle Würfel in die Hand und werfen. Es gibt jetzt prinzipiell zwei Möglichkeiten: Sie würfeln ein Yatzi - oder Sie würfeln kein Yatzi. Ist es deshalb richtig zu sagen, dass Sie mit 50% Wahrscheinlichkeit ein Yatzi hinkriegen? Wenn Sie schon mal Yatzi gespielt haben, wissen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Yatzi nach aller Erfahrung leider viel kleiner sein muss. Weshalb? Die Antwort lautet: Nicht beide Möglichkeiten (Yatzi oder kein Yatzi) sind gleich wahrscheinlich: Es gibt nur sechs mögliche Würfe, die zu einem Yatzi führen (nämlich fünf Einer, fünf Zweier, usw., fünf Sechser), während es total $6^5 = 7776$ mögliche Würfe gibt. Also ist die Wahrscheinlichkeit für ein Yatzi in einem Wurf gleich

$$\text{Wahrscheinlichkeit für ein Yatzi} = \frac{\#\text{günstige Fälle}}{\#\text{mögliche Fälle}} = \frac{6}{7776} = \frac{1}{1296}.$$

3 Lösung des Problems

Ähnliche Überlegungen führen auch bei unserer Aufgabe zum Ziel. Wir unterscheiden vier Fälle:

1. Vier Leo-Wähler in einer Gruppe. Diese Gruppe wird sicher Leo portieren, die andere Gruppe auf jeden Fall Ben. Es wird also das Los zwischen Leo und Ben entscheiden und Leo hat 50% Wahlchance.

2. Drei Leo-Wähler in einer Gruppe und in der gleichen Gruppe drei Ben-Wähler. In dieser Gruppe wird das Los zwischen Ben und Leo entscheiden. In der anderen Gruppe sind vier Ben-Wähler und

je ein Leo- und ein Dan-Wähler, die andere Gruppe wird also Ben wählen. Das macht total 25% Wahlchance für Leo (er muss zweimal im Los gegen Ben Glück haben, zuerst innerhalb der Gruppe und dann zwischen den Gruppen).

3. Drei Leo-Wähler in einer Gruppe und in der gleichen Gruppe zwei Ben-Wähler und der Dan-Wähler. In dieser Gruppe wird Leo gewählt, in der anderen Ben. Macht total 50% Chance für Leo.

4. Zwei Leo-Wähler in beiden Gruppen. Dann sind in beiden Gruppen mindestens je drei Ben-Wähler und Ben wird auf jeden Fall gewählt.

Nun können wir also schreiben:

$$\begin{aligned}\text{Wahrscheinlichkeit für Leos Wahl} &= \text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 1 \cdot 50\% \\ &+ \text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 2 \cdot 25\% \\ &+ \text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 3 \cdot 50\% \\ &+ \text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 4 \cdot 0\%.\end{aligned}$$

Also bleibt die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit für die vier Fälle zu berechnen. Leider sind nicht alle Fälle gleich wahrscheinlich. Einige Rechnungen vorweg: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus zwölf Leuten zwei (unterscheidbare) Sechsergruppen zu bilden? Es reicht, zu zählen, wieviele Möglichkeiten es gibt, sechs Leute (für die erste Gruppe) aus zwölf auszuwählen - die zweite Gruppe ist dann auch festgelegt. Für diese erste Gruppe gibt es für die erste Person 12 Möglichkeiten für die Auswahl, für die zweite noch 11, für die dritte noch 10, etc. und für die sechste Person noch 7 Möglichkeiten. Total also

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \text{ Möglichkeiten.}$$

Nun spielt allerdings die Reihenfolge, in der wir diese sechs Personen auswählen, keine Rolle. Deshalb führen $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ dieser Wahlen zur gleichen Gruppe, und wir finden am Ende: Es gibt

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \text{ Möglichkeiten}$$

für die Gruppenbildung. Allgemein gibt es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ Möglichkeiten,}$$

k Personen aus n auszuwählen. Dies wenden wir nun an, um die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Fälle eins bis vier eintreten, zu bestimmen.

1. Im ersten Fall sind entweder alle vier Leo-Wähler in der ersten Gruppe oder alle in der zweiten Gruppe. Sind alle in der ersten Gruppe, so müssen wir für die erste Gruppe zuerst 4 von 4 Leo-Wähler wählen (das gibt $\binom{4}{4} = 1$ Möglichkeit) und anschliessend 2 von den übrigen 8 Wählern, dazu haben wir $\binom{8}{2} = 28$ Möglichkeiten. Wir finden also total für die Wahrscheinlichkeit dieses Falles:

   $$\text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 1 = 2 \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{8}{2}}{\binom{12}{6}} = \frac{2}{33}.$$

   Der Faktor zwei resultiert daher, dass die vier Leo-Wähler in Gruppe 1 oder in Gruppe 2 sein können.

2. Im zweiten Fall gibt es $\binom{4}{3}\binom{7}{3}$ mögliche Gruppen mit je drei Leo- und drei Ben-Wählern. Es ergibt sich:

   $$\text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 2 = 2 \cdot \frac{\binom{4}{3}\binom{7}{3}}{\binom{12}{6}} = \frac{10}{33}.$$

3. Im dritten Fall müssen wir für die erste Gruppe 3 von 4 Leo-Wählern, 2 von 7 Ben-Wählern und den Dan-Wähler auswählen. Dafür gibt es

$$\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{1}{1} \text{ Möglichkeiten.}$$

Als Gesamtwahrscheinlichkeit für diesen Fall errechnet sich:

$$\text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 3 = 2 \cdot \frac{\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{1}{1}}{\binom{12}{6}} = \frac{2}{11}.$$

4. Und schliesslich für den letzten Fall: Für die Bildung der ersten Gruppe gibt es

$$\binom{4}{2}\binom{8}{4} \text{ Möglichkeiten.}$$

Als Gesamtwahrscheinlichkeit kriegen wir:

$$\text{Wahrscheinlichkeit für Fall } 4 = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{4}}{\binom{12}{6}} = \frac{5}{11}.$$

Man beachte, dass hier der Faktor zwei fehlt, da es hier keine Rolle spielt, ob zwei Leo-Wähler in der ersten oder in der zweiten Gruppe sind (in der anderen Gruppe sind dann jeweils auch zwei Leo-Wähler).

Tatsächlich addieren sich die Wahrscheinlichkeiten der vier Fälle zu eins: $\frac{2}{33} + \frac{10}{33} + \frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{2+6+10+15}{33} = 1$. Nun kann die Wahlchance für Leo ausgerechnet werden:

$$\text{Wahrscheinlichkeit für Leos Wahl} = \frac{2}{33} \cdot 50\% + \frac{10}{33} \cdot 25\% + \frac{2}{11} \cdot 50\% + \frac{5}{11} \cdot 0\% = \frac{13}{66} \cong 19.7\%.$$

Wir halten fest: Leo wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 19.7%, also mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 1 zu 5 gewählt.

4 Kommentar

Bei einem einfachen Losentscheid wäre die Wahlchance Leos grösser: Vier von zwölf Wahlberechtigten stimmten für ihn, das entspricht einer Wahlchance von ca. 33%. Ist dieses Verfahren deshalb unfair?

Auf jeden Fall ist es ein Verfahren, dass Kandidaten, die von einer Mehrheit der Wahlberechtigten unterstützt werden, bevorzugt. Das ist allerdings im Alltag relativ verbreitet. Wir illustrieren dies an einem Beispiel aus der Politik. (Solche Beispiele sind immer gefährlich, ich will auch auf keinen Fall politisieren, sondern nur ein Phänomen aus der Statistik illustrieren...) Zur Zeit (Legislaturperiode 2003 bis 2007) stammen in der Schweiz von 46 Ständerätinnen und Ständeräten 37 aus dem bürgerlichen Lager (FDP, CVP und SVP) und neun aus dem links-grünen Lager (SPS). Die Links-Grünen sind also im Ständerat mit knapp 20% der Mandaten vertreten, während sie bei den Nationalratswahlen 2003 einen Wähleranteil von 32.5% erreichten (Quelle: Bundesamt für Statistik, `http://www.bfs.admin.ch/bfs/portal/de/index/themen/17/22/publ.Document.69324.pdf`). Hier sieht man ein ähnliches Phänomen wie bei Leo: Kleinere Gruppen kriegen vom Kuchen relativ gesehen kleinere Stücke als grössere Gruppen. Das hier geschilderte Phänomen kann aber relativ gut erklärt werden: Der Ständerat wird im Majorzverfahren gewählt. Da in den meisten Kantonen die bürgerlichen WählerInnen in der Mehrheit sind, gehen die Minderheitsstimmen der linken WählerInnen unter. In allen Kantonen ausser BS und NE ist dann auch mindestens ein Ständeratssitz durch Bürgerliche abgedeckt. Im Nationalrat hingegen, wo die Sitze nach einem (unechten) Proporzverfahren verteilt werden, kommen die Linken auf rund 70 Sitze, also auf 35% der Sitze, was relativ nahe an ihrem Wähleranteil liegt.

Nun, mit Statistiken kann man viel verzerren und zurechtbiegen. Die Grundaussage ist doch einigermassen klar und gilt auch in anderen Staaten, wo nach Majorzverfahren gewählt wird: Während in Proporzwahlen auch Minderheiten ihrem Wähleranteil nach Chancen auf Vertretungen haben, werden starke Parteien und Gruppierungen bei Majorzwahlen bevorzugt. Trotzdem ist unser Wahlsystem aber nicht (à priori) unfair, sondern eben ein im Voraus festgelegtes System, das bestimmt, nach welchen Kriterien Mandate verteilt werden.

Und zusehr sollte sich Leo auch nicht beklagen, denn würden die zwölf Wahlberechtigten einfach nach absolutem Mehr wählen, so hätte er ohnehin keine Chance gewählt zu werden!