Wettbewerb Euler im Tram, Aufgabe 7

18. September 2007

1 Problemstellung

Gibt es auf einem 3×10-Schachbrett einen geschlossenen Springerweg, welcher alle Felder genau einmal besucht?

2 Antwort

Ja, es gibt Lösungen für die Aufgabenstellung, bis auf Wahl des Startpunkts und der Richtung des Durchgangs genau 16 verschiedene. Eine mögliche Lösung ist auf dem nächsten Bild zu sehen:

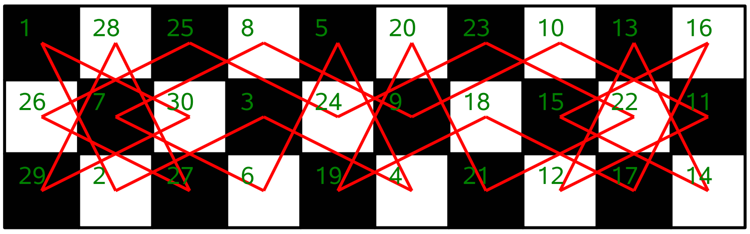

Abbildung 1: Eine mögliche Lösung

3 Lösungsweg

Wie bei einem normalen 8×8-Schachbrett bezeichnen wir die einzelnen Felder mit Buchstaben und Zahlen. Dabei stehen die Buchstaben $a - j$ für die erste, zweite bis zehnte Linie und die Zahlen 1-3 für die entsprechende Reihe (siehe auf dem folgenden Bild). Ein Springer kann nun zum Beispiel von c1

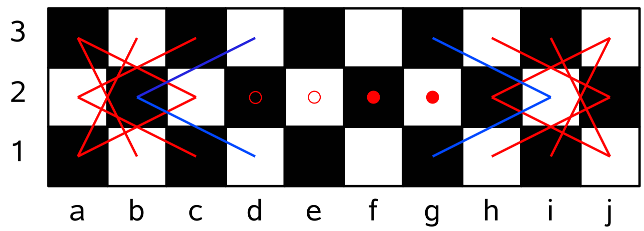

Abbildung 2: Was sich unmittelbar ergibt

nach a2 hüpfen und von dort weiter nach c3. Schauen wir genau hin, so merken wir, dass der Springer auf einem geschlossenen Weg, welcher alle Felder besucht, genau einmal diesen Teilweg (c1-a2-c3) nehmen muss, entweder in dieser oder in der umgekehrten Richtung. Dies einfach deshalb, weil der Springer vom Feld a2 aus nur 2 Möglichkeiten hat weiterzuspringen: nach c1 oder c3.

Auf dem obigen Diagramm ist weiter eingezeichnet, welche Wegstücke sich sonst noch ergeben, nämlich bei Betrachtung der Felder a1, a3, j1, j3, b2, i2, j2, welche ebenfalls nur 2 Nachbaren haben.

Zusätzlich sind die Felder d2, e2 und f2, g2 rot markiert. Es gibt nämlich von den Feldern b1 und b3 nur zwei zusätzliche Nachbarn: d2 und c3 bzw. d2 und c1, und der Weg kann weder von beiden nach d2 noch von beiden auf die Felder auf der c-Linie führen, denn sonst ergäbe sich ein zu kurzer geschlossener Springerweg. Man beachte zudem, dass das Feld e2 mit je einem Feld auf der c- und der g-Linie verbunden werden muss.

Also geht jeder Weg vom Feld d2 über b1 (oder b3) auf das eingezeichnete Teilstück, führt via b3-c1 (resp. b1-c3) auf das Teilstück c1-a2-c3 und landet schliesslich auf dem Feld e2. Analoges lässt sich über die Situation in der rechten Bretthälfte sagen.

Der Felderkomplex bestehend aus dem Rechteck d1-d3-g3-g1 sowie den Feldern b2 und i2 lässt sich nun separat betrachten, denn wie eben festgestellt besucht jeder geschlossene Springerweg (der alle Felder des Bretts besucht) die restlichen Felder in der linken Hälfte in Folge und die restlichen Felder in der rechten Hälfte in Folge, wobei die Ein- und Ausgänge durch die rot markierten Felder d2, e2

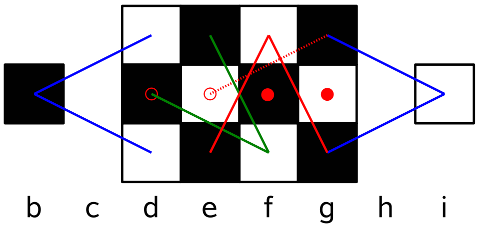

Abbildung 3: Restproblem

bzw. f2, g2 gegeben sind.

Wir beginnen unsere Betrachtung beim Feld e2. Es gibt zwei Nachbarn zur Auswahl: g1 und g3. Wir entscheiden uns für g3 (die Wahl von g1 ergäbe bzgl. der waagrechten Mittellinie gespiegelte Lösungen) und folgen damit der gestrichelten Linie. Nun gibt es keine andere Wahl als weiter über i2, g1, f3 nach e1, denn mit einem Sprung von f3 nach d2 würde der Springer seinen Weg schon in der linken Bretthälfte beenden.

Der Weg beginnend beim Feld d2 führt nun notwendigerweise weiter über f1 nach e3. Nun gibt es die Wahl von e3 nach d1 oder nach g2 weiterzuspringen. Dementsprechend gibt es zwei (resp. durch Spiegelung an der waagrechten Mittellinie sogar vier) verschiedene Lösungen für das Problem auf dem obigen Felderkomplex, nämlich:

- (e2)-g3-i2-g1-f3-e1-d3-b2-d1-(f2) und (d2)-f1-e3-(g2)
- (e2)-g3-i2-g1-f3-e1-(g2) und (d2)-f1-e3-d1-b2-d3-(f2)

Nun lassen sich die Wegstücke in den verschiedenen Bretteilen zu einem geschlossenen Springerweg zusammensetzen, welcher alle Felder genau einmal besucht, und jeder geschlossene Springerweg stimmt mit einem von diesen überein. In der Diskussion hatten wir vier unabhängige Wahlmöglichkeiten zwischen jeweils zwei Entscheidungen: je eine im linken und rechten Teil, dazu zwei im übriggebliebenen Felderkomplex. Insgesamt ergeben sich also bis auf Wahl des Startortes und der Richtung des Durchgangs genau 16 verschiedene Lösungen.